

機械回路の記号解析

下 条 誠

2010 年 8 月版

はじめに

メカトロニクスは日本で生まれた新しい技術概念であり、メカニズムを中心に、センシング、制御、電子・情報技術など必要な技術を合目的的に融合し、省エネ、省資源、知能化を目指す技術である。本論は、メカトロニクス特論講義の前半にあたり、機械回路の記号解析法を中心に述べる。

機械の動力学的解析手法と電気回路の交流理論及び過渡解析の手法との間には、非常に似通った関係がある。また同様な関係は、特定な場合の熱・流体に対しても成り立つ。機械回路の記号解析とは、機械系と電気回路系のアナロジーを用いて、機械系を電気回路に変換し、電子回路シミュレータを用いて機械系の解析を行おうとするものである。電子回路シミュレータとは、電子・電気回路をソフトウェアでシミュレーションするもので、PC を用いて簡単に実行できる。また、Free Soft も多数あり、誰でも自由に利用できる点ありがたい。

最近の機械系の学生は、電気・電子回路を始めからわからないとして、毛嫌いする学生が多く存在する。このわからないとは、これまでの電気に対する経験に乏しく、馴染みがないことその原因であろうが、その動作が見えないことにその理由があるようだ。今回講義で用いる電子回路シミュレータは、利用法も簡便なものである。まず回路モデルを作り、動かすことによって、電子・電気回路系の動作の確認を行うことができる。即ち、自分で回路を作り、回路及びパラメータを変化させると、どのように特性が変化するか簡便に確認できる。このように、電気電子回路を見て、触って？、動作させることで、電子・電気回路系への興味・理解が進むものと思われる。

本講義の隠れた狙いは、機械系学生諸君に少しでも電子・電気回路への興味、理解を深めてもらいたい願いがある。これからの時代は電気エネルギーなど電気の利用がますます広まるとされる。機械の塊に思われる自動車も、すでに電子・電気技術の役割が大きく、この勢いはいろいろな分野において広がっていくだろう。この結果、これからの機械技術者で電子・電気回路がわからない者は、その活躍の場がだんだん狭まって行くと思われる。

願わくば、本講義で、電子・電気回路への食わず嫌いなアレルギーが無くなり、より幅広い知識を持つ機械技術者になってくれることを期待する。なお、本講義の内容は下記参考書によるところが大きい。ここに感謝する次第である。

な

参考文献：

1. 中田孝：工学解析（技術者のための数学手法），オーム社，1974.
2. Cannon：Dynamics of physical system, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1967.

第 I 部

機械回路の記号解析

第 1 章

機械系と電気系のアナロジー

はじめに

機械の特に動力的解析手法と、電気回路の交流理論及び過渡解析の手法との間には非常に似通った関係にある。また同様な関係は、特定な場合の熱・流体に対しても成り立つ。本講義では、機械システムの動力的特性を、機械回路に置き換えて電気回路的に解析する手法について解説を行う。

1.1 機械系と電気系における相似

ここで例として図 10.1 のような機械系と電気系のシステムについて考えてみる。機械系は 1 自由度の振動系で外力で駆動されている。同様に電気系は LCR が並列に接続された系で電流源により駆動されている。機械系では速度を v 、電気系では V は電圧をそれぞれ表すものとする。この両方の系の方程式を作ってみる。すると力の平衡方程式と、キルヒホッフの電流保存則 (KCL) は下記のような方程式となる。ここで $f \Leftrightarrow i$, $v \Leftrightarrow V$, $m \Leftrightarrow C$, $d \Leftrightarrow R^{-1}$, $k \Leftrightarrow L^{-1}$ を対応させると、この系を記述する方程式は図 1.1 に示すように同じ

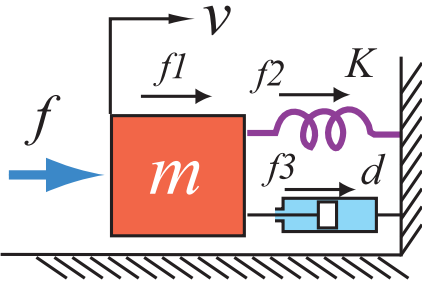
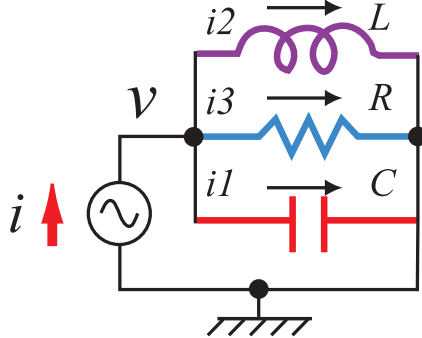
機械系	電気系
	
<p>力の平衡から</p> $f = f1 + f2 + f3$ $f = m \frac{dv}{dt} + dv + k \int v dt$	<p>キルヒホッフの電流保存則 (KCL) から</p> $f = i1 + i2 + i3$ $f = C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V + \frac{1}{L} \int V dt$

図 1.1: 機械系と電気系における相似回路

となる．このことは機械系の解析に電気系のアナロジーが利用できることを示している．すなわち機械系を電気回路系に置き換えることで，電気系の特性から機械系の特性が推定できることを示す．本章ではこの機械系を電気回路系に変換し，変換した電気回路系を，回路シミュレータを用いてその特性を解析することを試みる．

1.2 量の話

我々の扱う物理量の量の概念に関しては各種の見方がある．量に関しての，その質に関する論理構造が出てくるのは，皆さんが小学校で教わった”外延量と内包量”が始めではないかと思う．即ち，長さ，重さなど，そのまま足せる”外延量”と，温度，密度，濃度などのそのまま足せない”内包量”のことである．

外延量と内包量

- 外延量 (extension)：長さ，面積，体積，質量，時間など（そのまま足せる量）
- 内包量 (intension)：濃度，密度，温度，速度，流速など（そのまま足せない量）

この量概念の分類の一つとして，”流通量と位差量”がある．流通量とは，電流，流量，力など，要素を通過する量を表し，位差量とは，電圧，圧力，温度，速度など要素に加わる差の量を表す．図 1.2 には流体の例を示す．図には，水路管と水を流すためのポンプ及び水の流れを妨げる水車を示す．ポンプによって水压を上昇させると，水路管内の水車による抵抗にもかかわらず水が流れ始める．ここで，流通量とは，管内を流れる水量を示し，位差量は水流を発生するための圧力である．ちなみに，流通量と位差量の積はパワーとなる．例えば，電流と電圧の積は電力 W (ワット) となり，力と速度の積は仕事率 J (ジュール) となる．

- 流通量 (throughquantity)：電流，流量，熱流量，力など（要素を通過する量）
- 位差量 (accrossquantity)：電圧，圧力，温度，速度など（要素に加わる差の量）

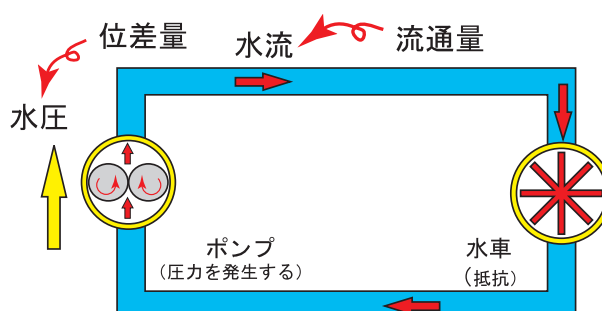


図 1.2: 流体の場合の流通量と位差量の例

電気系，機械系，熱系，流体系の基本となる方程式は，既に述べたように同じ方程式として記述出来る場合が多くあり，このことからこれらの系の解析は，違う系のアナロジーを用いて行える．例えば，機械系を同じ方程式となる電気回路として解析する場合がこれに当たる．この流通量と位差量の概念は，電気系，機械系，熱系，流体系をアナロジーを用いて解析する場合，各物理量に対応付を理解する必要がある．表 1.1 にそれぞれの系において対応する量を，表 1.2 にその方程式，表 1.3 にエネルギーの蓄積と散逸を行う要素についての基礎方程式を示す．図 10.1 には，エネルギーの蓄積と散逸を行う各要素を図によってその対応関係を示す．

表 1.1: 流通量と位差量

量	電 気	機 械	熱	流 体
流通量	電流: i	力: f (モーメント M)	熱流量: q	流量: w
位差量	電圧: v	速度: v (角速度 ω)	温度: T	圧力: P

表 1.2: 基礎方程式

	電 気	機 械	熱	流 体
方程式	KCL:	$\sum f = 0$	$C \frac{dT}{dt} = q_{netin}$	$W_{netin} = \frac{dm}{dt}$
(流通量)	$\sum i_{net} = 0$	$\sum M = 0$	C 熱容量	$\sum f = 0$
方程式	KVL:	$\sum v_{loop} = 0$	$\sum T_{loop} = 0$	$\sum P_{loop} = 0$
(位差量)	$\sum v_{loop} = 0$	$\sum \omega_{loop} = 0$		

表 1.3: エネルギーの蓄積 (受動的)

	電 気	機 械	熱	流 体
流 通 量	コイル (L) $i = \frac{1}{L} \int v dt$	バネ (K) $f = k\Delta x = k \int v dt$ $M = k\Delta x = k \int \omega dt$
位 差 量	容量 (C) $v = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{dv}{dt}$	質量 (m) $v = \frac{1}{m} \int f dt$ $\omega = \frac{1}{J} \int M dt$	熱容量 (C) $q_{net} = C \frac{dT}{dt}$	流体容器 (C) $w = C \frac{dp}{dt}$ (gas strage) $w = C \frac{dh}{dt}$ (liquid strage)

表 1.4: エネルギーの散逸 (受動的)

	電 気	機 械	熱	流 体
流 通 量	抵抗 (R) $i = \frac{1}{R} v$	粘性抵抗 (d) $f = dv$ $M = k\Delta x = k \int \omega dt$	熱抵抗 (R) $q = \frac{1}{R} (T_1 - T_2)$	流体抵抗 $w = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)^{\frac{1}{\alpha}}$

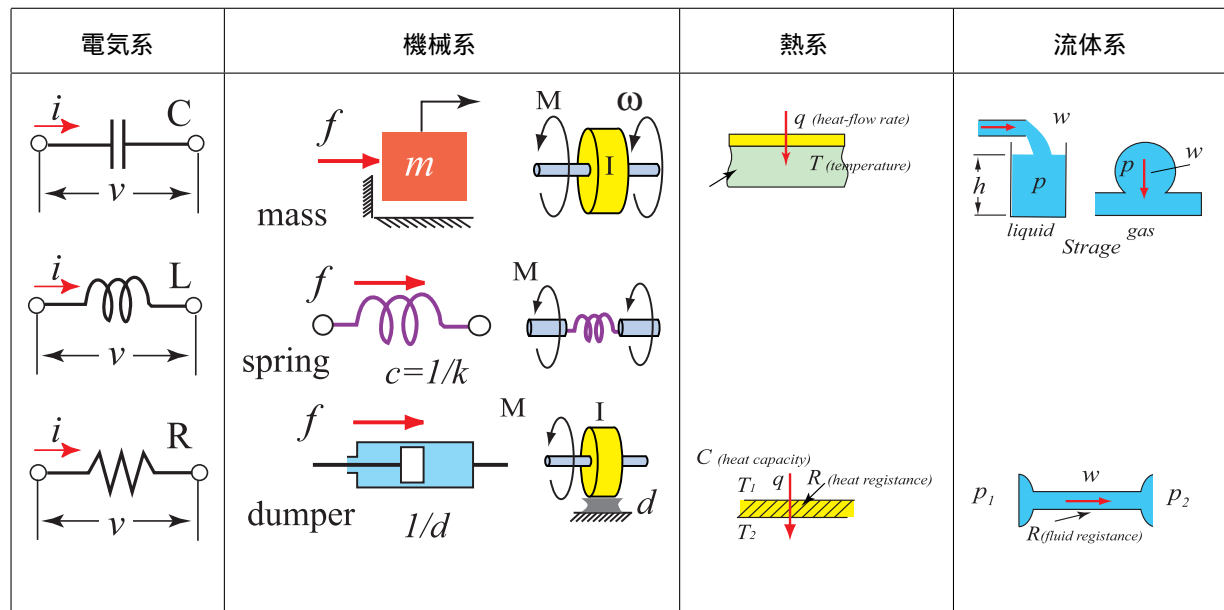


図 1.3: いろいろな物理系における各要素の相似関係

1.3 機械系の回路解析（モビリティ法）

本章では、機械システムの動力学的特性を、機械回路に置き換えて電気回路的に解析する手法について解説を行う。まずはじめに、機械系の「速度と力」を、電気系の「電圧と電流」に対応させたモビリティ法について解説する。この機械系の場合、速度を位差量とし、力を流通量とする。機械系では通常、位置と力でシステムの状態を表現するのが、位置の代わりにその時間微分である速度を使う点なじみにくいかもしれない。また速度-電流、力-電圧とするアナロジーもあるがそれに関しては双対性の議論の後、若干ふれることにする。

対応関係： 速度 \Leftrightarrow 電圧，力 \Leftrightarrow 電流

1.3.1 モビリティ (mobility)

定義： $\Delta v_{1,2} = (v_1 - v_2) = \lambda f$ のとき、 λ をモビリティ (mobility) とする。

図 1.4 に示す機械要素の入力端 1 の速度を v_1 ，出力端 2 の速度を v_2 とし、通過する力を f とする。これから、この定義に則り、ダンパ、ばね、質量のモビリティによる表現を求めてみる。

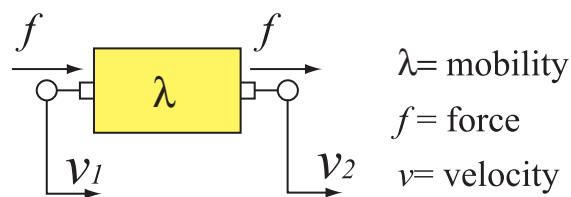


図 1.4: モビリティの定義

(1) ダンパのモビリティ

図 1.5 には粘性流体入りのダンパを示す．入力端の速度と必要とする力の関係は以下ようになる．

$$f = d(v_1 - v_2) \quad d: \text{減衰抵抗係数} \quad (1.1)$$

すると定義式から

$$\Delta v_{1,2} = \frac{1}{d} f \quad (1.2)$$

よって

$$\lambda = \frac{1}{d} \quad (1.3)$$

となる．

(2) バネのモビリティ

図 1.5 には、ばね要素を示す．

$$f = k(x_1 - x_2) = \frac{1}{c}(x_1 - x_2) \quad (1.4)$$

ただし、 k ：ばね剛性、 c ：ばねのコンプライアンス定義式は速度差を求めるため、それぞれの変位を時間で微分したものになる．

$$\Delta v_{1,2} = (v_1 - v_2) = \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) \quad (1.5)$$

ここで、微分を演算子 s で表すと上式は

$$\Delta v_{1,2} = (v_1 - v_2) = s(x_1 - x_2) = \frac{1}{k} s f = c s f \quad (1.6)$$

となる．ここで、微分演算子を s とおいたが、これはヘビサイド演算法、ラプラス変換法に関するものである．ここでは、力を微分する記号と考えればよい．

$$\lambda = c s \quad (1.7)$$

となる．

演算子とは、微分演算、積分演算を記号的、代数的に行う場合に用いる．例えば、定数係数をもつ線形微分方程式を簡単に解くために、ヘビサイドの方法やラプラス変換を用いて演算する解法のことを演算法という．ここでは s を微分演算子として用いている．また s^{-1} は積分演算子となる．

$$s = \frac{d}{dt}, \quad s^{-1} = \int dt \quad (1.8)$$

(3-1) 質量のモビリティ

本章では質量は剛体であるとする．すると定義式で示した入力端 1 の速度 v_1 ，出力端 2 の速度 v_2 はどのように考えればよいのだろうか．質量と力の関係は $f = ma$ と表現され加速度 a は慣性系からの加速度となり，通常地球を原点とした加速度，すなわち地球を原点と考えて質量の速度の時間微分を行うことで加速度を求めている．すなわち，入力端 1 の速度を v_1 とすると，出力端 2 は慣性系である地球であり， $v_2 = 0$ と考えてよいであろう．

$$f = ma = m \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = m \frac{d(v_1 - 0)}{dt} = ms(v_1) \quad (1.9)$$

となる．ここで， $\Delta v_{1,2} = ms^{-1}f$ ，よって

$$\lambda = (ms)^{-1} \quad (1.10)$$

となる．ここで s^{-1} は微分演算子の逆演算であるので積分を表す．

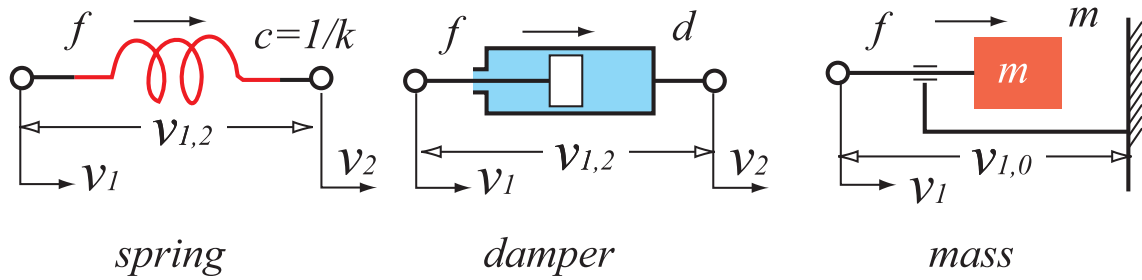


図 1.5: バネ，ダンパ，質量のモビリティ表現

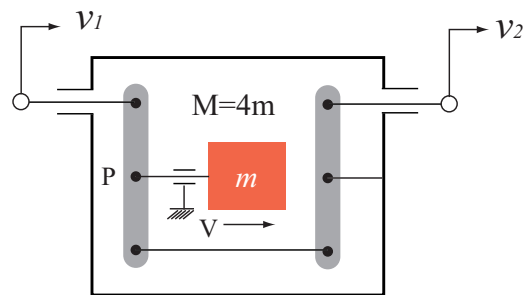


図 1.6: 直列質量の表現

(3-2) 直列質量のモビリティ

質量は電気系のアナロジーではキャパシタンスに置き換えられる．上記の例では質量は常に地球を原点にすることになる．いわば回路として並列接続に相当し，その一端は常にグランドに設置されることとなる．しかしながら，電気回路においてキャパシタンスは，常に一端はグランドへ接続されることはなく，ノード間を接

続すること，いわば直列に接続に相当する利用が一般的である．では，このような直列接続を質量で実現するにはどのような機械系となるかを図 1.6 に示す．質量を無視できるてこを 2 個使い，右側にてこの中点をピンで支え，左側にてこの中点を $M = 4m$ の質量に接続する．いま $v_1 > v_2$ とすれば質量の右方向への速度はてこの原理で

$$V = (v_1 - v_2)/2 \quad (1.11)$$

となる．従って支点 P にかかる慣性の反作用力は

$$F = M \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} M \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = \frac{1}{2} M \frac{dv_{1,2}}{dt} \quad (1.12)$$

となる．この反作用に釣り合う入力 $f = F/2$ であり，また出力端に生ずる力も同じ値になる．従って式 (1.12) から $v_{1,2}$ を求めるには，積分 s^{-1} 演算子を用いて，直列質量要素に関する式を得る．

$$v_{1,2} = \frac{2}{Ms} F = \frac{2}{Ms} 2f = \frac{4}{Ms} f \equiv (ms)^{-1} f \quad (1.13)$$

これから図 1.6 は，直列質量の場合の機械系モデルとして成立することがわかる．

1.3.2 モビリティ要素の接続

（１）直列接続公式

図 1.7(a) において要素は全て直列に接続されている場合を示す．このとき，次のようなことが成り立つ．

1. 全ての要素には，同じ力 f がかかる．
2. 各要素入出力端の速度和は以下ようになる．

$$\Delta v_{1,n} = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) = \Delta v_{1,2} + \Delta v_{2,3} + \cdots + \Delta v_{n-1,n} \quad (1.14)$$

3. この直列接続全体のモビリティ λ は，各要素入出力端の速度和を力で除すれば良い．

$$\lambda = \frac{v_{1,n}}{f} = \frac{\Delta v_{1,2}}{f} + \frac{\Delta v_{2,3}}{f} + \cdots + \frac{\Delta v_{n-1,n}}{f} = \lambda_{1,2} + \lambda_{2,3} + \cdots + \lambda_{n-1,n} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,i+1} \quad (1.15)$$

以上より，直列接続のモビリティは，各要素のモビリティの総和となる．

（２）並列接続公式

図 1.7(b) では，要素は全て並列に接続されている．このとき次のことが成り立つ．

1. 全ての要素には，同じ速度差 $\Delta v_{1,2}$ がかかる．
2. 各要素入出力端の力の総和は以下ようになる．

$$f = f_a + f_b + \cdots + f_n \quad (1.16)$$

3. この並列接続全体のモビリティの逆数は、各要素入出力端の力の総和を速度差で除すれば良い．

$$\lambda^{-1} = \frac{f}{\Delta v_{1,2}} = \frac{f_a}{\Delta v_{1,2}} + \frac{f_b}{\Delta v_{1,2}} + \cdots + \frac{f_n}{\Delta v_{1,2}} = \lambda_a^{-1} + \lambda_b^{-1} + \cdots + \lambda_n^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{-1} \quad (1.17)$$

以上より、並列接続のモビリティの逆数は、各要素のモビリティの逆数の総和となる．

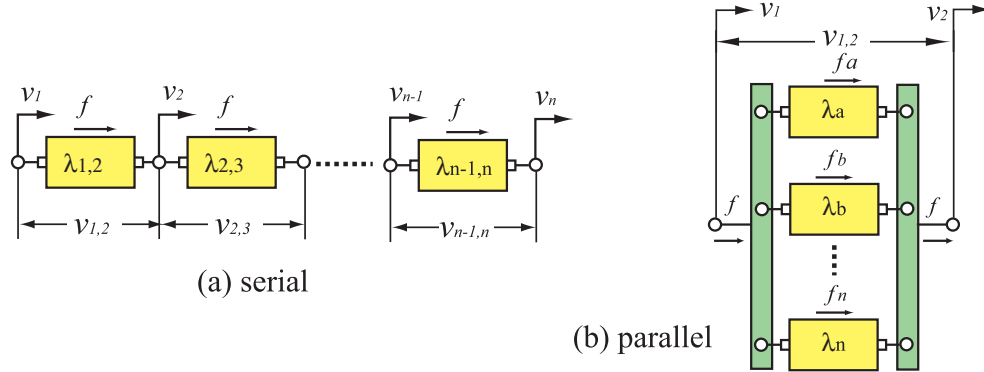


図 1.7: モビリティの直列・並列接続

以上のようにモビリティは電気回路での直列、並列接続と同様な特性をもつことがわかった．即ち、機械系の各要素に対応する電気回路要素を機械系と同じような関係で接続することで良いことを示す．

第 2 章

電子回路シミュレータ

さて，これから機械回路を電子回路シミュレータを用いて解析して行く．この為には，電子回路シミュレータについて親しんでおく必要があるため，若干の説明を行う．

2.1 電子回路シミュレータ

電子回路シミュレータは PC を使って各種電気・電子回路のシミュレーションを行うものである．PC の画面上に回路図を作り，解析条件を設定するだけで電子回路の各部の電圧，電流，電力の時間変化の様子，周波数解析，過渡応答解析などが簡単にできる．またデジタル回路の解析も行うことができる．

本講義では，H22 年度から電気回路シミュレータとして QUCS(Quite Universal Circuit Simulator) (キュークスと言われているらしい) を利用することにした．その理由は，オープンソースなこと，グラフィカルなユーザインターフェースを持つこと，WindowsOS でも動作することである．現在多くの OS に移植されているようで，メニューが多言語化されており日本語のメニューもあるなど初心者にも使いやすい特徴を持っている．ただ，Version が若いので，機能の未完，バグ等の心配はある．しかしオープンソースのプログラムとして世界各国多くの方々が開発を続けているようなので将来的には面白いかも知れない．また，当然であるが，利用するにはプログラムをインストールする必要がある．オフィシャルサイトから最新バージョン (2010 年 8 月現在 0.0.15) をダウンロードする．インストール方法並びに使い方のマニュアル等は Google などで”qucs 説明書”として検索すると，良いものが見つかるはずである．お勧めとしては，下記に示した workbook.pdf(英語) である．まずは最初の 2 章までで良いでしょう．また，簡単な使い方は下記 QUCS 入門 (日本語) で十分である．

Operating System

Qucs is currently developed under the GNU/Linux OS using the standard autotools with no special effort to support other operating systems. Qucs is said to be successfully compiled and run on Solaris, NetBSD, FreeBSD, MacOS, Windows and Cygwin... help is needed !

License

Qucs is released under the GPL license and so it is free for free programmers and users !

- オフィシャルサイト：<http://qucs.sourceforge.net/>

- windows 用ダウンロード：<http://sourceforge.net/projects/qucs/files/qucs-binary/>
- QUCS 入門：<http://www.sp.es.yamanashi.ac.jp/~ohki/qucs/qucs.html>
- 本格的使い方や各種応用例：<http://qucs.sourceforge.net/docs.html>
- 英文テキスト (559 頁)：<http://qucs.sourceforge.net/docs/workbook.pdf>

一般的に電子回路シミュレータとしては、SPICE が有名である。現在多くの電子回路シミュレータは、SPICE をベースにしている。SPICE はカリフォルニア大パークレー校で開発されたもので、現在も基本ソースは公開されている。販売されているものとしては PSPICE (サイパネットシステム社) がある。我が研究室では研究用の回路設計にはこの PSPICE を用いている。また、これの簡易版としては CQ 出版社から「電子回路シミュレータ PSPICE 入門編」がでている。これには、機能制限の付いた評価版の CD 付が付属しており、インストール法から各種応用回路の例まで説明されている。これを利用してもよいでしょう。ただちょっと初心者にはとっつきにくいかも知れない。念のため、WEBCLASSL の中で "Pspice 入門マニュアル" を用意している。

この他、CircuitMaker と呼ばれるソフトもある。使い方が簡単なため以前の講義では、開発会社の HP よりダウンロード可能な、無料お試し版を利用していた。しかしながら、現在無料お試し版は利用できないようなので使うのを止めた。但し、この回路シミュレータの解説本として講談社出版「電子回路シミュレータ入門」(加藤ただし著、¥1500) がある。本にはソフトとサンプルの入った CD がついています。

それぞれ長短がありますが各人気に入ったものを利用してください。

2.2 電気回路シミュレーション

さて、ここでは電子・電気回路シミュレータとはどんなものか、皆さんに慣れ親しんでもらうためいくつかの例を示した。シミュレータの使い方は、上記マニュアル等で学んでいただくとして、ここでは、QUCS を用いて電子・電気回路のシミュレーションを行う例を示してある。また例ではアナログ回路のみであるがデジタル回路へも適用できる。

2.2.1 RC フィルター

図 2.1 には、例として RC フィルターの電子回路シミュレーション結果を示す。抵抗とコンデンサの簡単な回路である。入力交流電圧源とした。シミュレーションは、AC シミュレーションとトランジェント解析を行った。AC シミュレーションでは、周波数応答が求まる。トランジェント解析では、回路各点での電圧・電流出力の時間変化が求まる。

図 2.1 では、実時間応答波形と、周波数応答結果を示している。図右上は、トランジェント解析結果を示す。横軸が時間で縦軸が電圧を示す。青色線は入力電圧、赤色線は出力電圧を示す。出力の位相が遅れているのが観察される。図右下は、bode 線図である。横軸は周波数、縦軸は出力である。1kHz あたりでゲインが低下するのがわかる。位相線図は各自描いてみよう。位相の求め方は図 2.6 の "方程式" と記述してある項を参考にしてください。どうも "phase" という関数を使うようです。

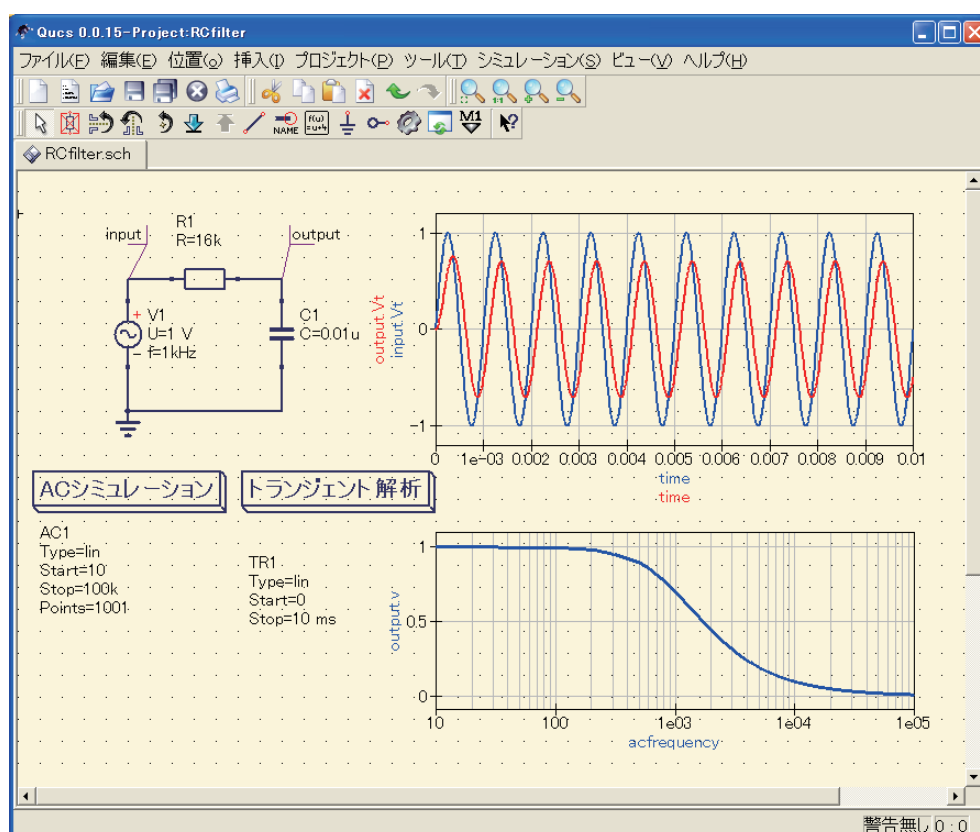


図 2.1: RC フィルターの解析例

2.2.2 ツェナーダイオードを用いた定電圧回路

図 2.2 にはツェナーダイオードを用いた定電圧回路を示す。回路図には電圧計と電流計を入れてあるが、これは計測するためのものであり、回路の動作には影響しない。ツェナーダイオードとは、ダイオードの一種で、ある一定電圧以上の逆電圧 V_Z が加わると逆方向でも電流を通す性質のダイオードである。この電圧 V_Z をツェナー電圧と呼ぶ。ツェナーダイオードは、回路の電圧保護などによく利用される。ここでは、簡便な一定電圧供給電源を作成してみる。図 2.2 の回路は $V_Z = 5.6V$ の素子を用いて、定電圧を実現したものである。これにより負荷（この例では R_2 ）に加わる電圧を常に一定とできる。例では、一定電圧にノイズなどの変動分が加わったとして、入力電圧源に DC 電圧に交流電圧が重畳させたものを用いた。入力電圧は R_1 を通り、ツェナーダイオードと負荷へ繋がっている。 R_1 を流れた電流は、ツェナーダイオードと負荷へと分岐する。加わる電圧が V_Z 電圧より高い場合、それより高い電圧分はツェナーダイオードを通りグラウンドへ電流が流れてしまう。この電流により、ツェナーダイオード内部で発熱が起こる。このため放熱の限界があり設計上ダイオードの選択など必要になる。各自、負荷抵抗 R_2 、電源電圧、各種素子定数を変化させて特性を調べてみよう。図 2.3 には図の回路のときの、入力電圧、負荷に加わる電圧、およびツェナーダイオードを通る電流、負荷を流れる電流をそれぞれ示す。またこの回路では、大きな電流を流せる定電圧源は難しい。大きな電流を供給できる定電圧源ではトランジスタ等と組み合わせて利用することが一般的である。

次の問いは図 2.2 の回路の仕組みがわかればできる問題である。

1. ツェナーダイオードで発生する熱量は幾らか？
2. 負荷に供給できる電流の制限は？
3. 抵抗 R1 の役割は何か？
4. コンデンサ C1 の役割は何か？

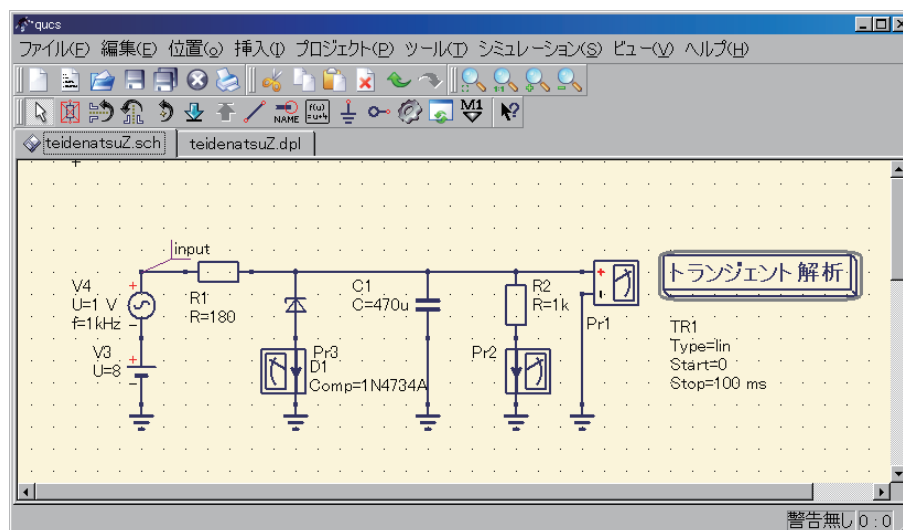


図 2.2: ツェナーダイオードを用いた定電圧回路

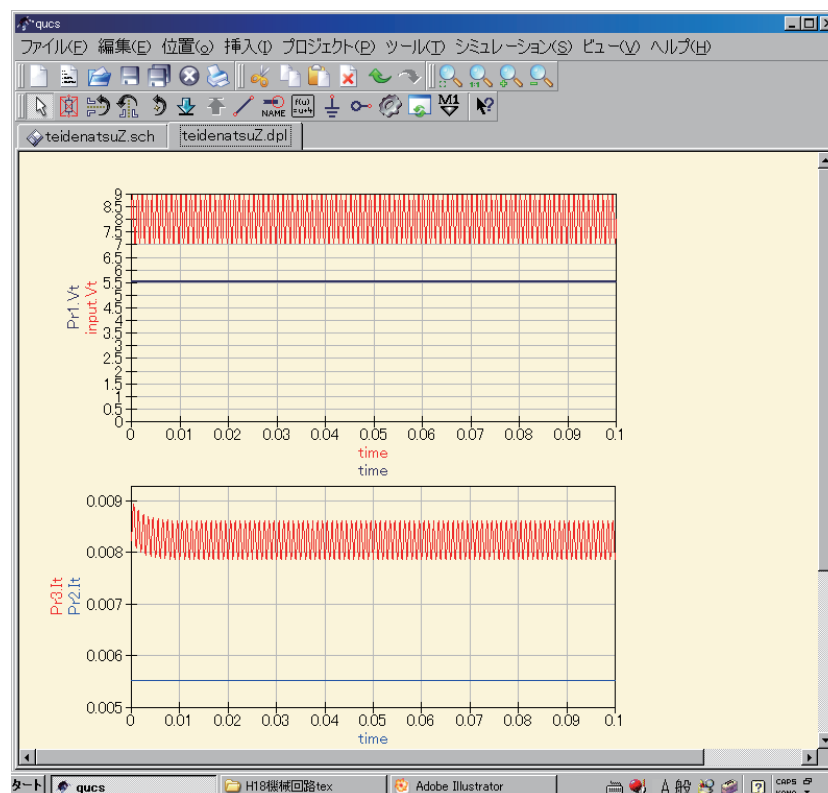


図 2.3: ツェナーダイオードを用いた定電圧回路シミュレーション結果

2.3 電子回路シミュレータの演習例題

以下には各自の練習のため回路を示す．各回路でのトランジェント解析，周波数応答をシミュレーションにより求めてみよ．

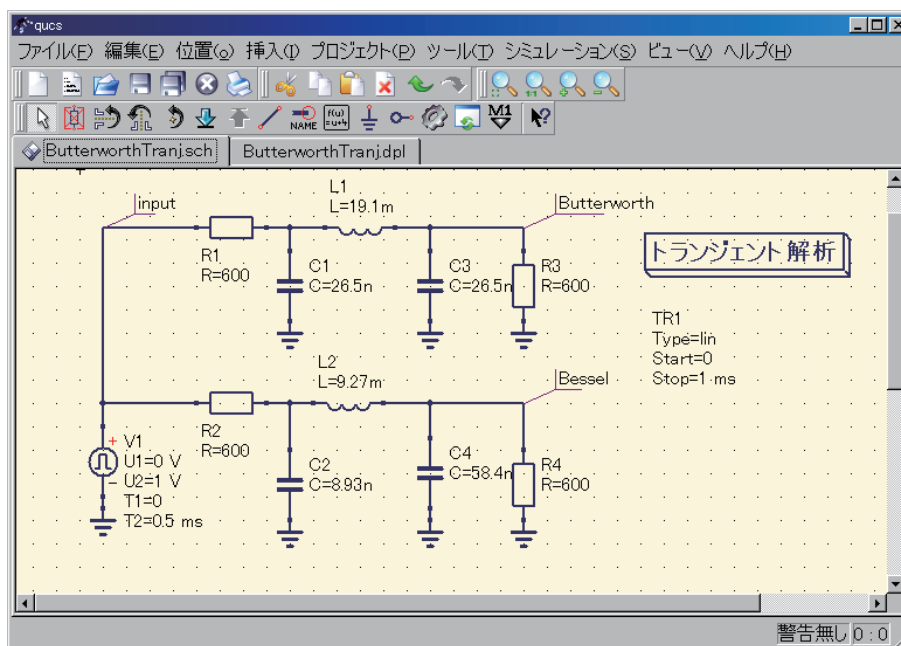


図 2.4: 問題 1 : Butterworth,Bessel 過渡応答

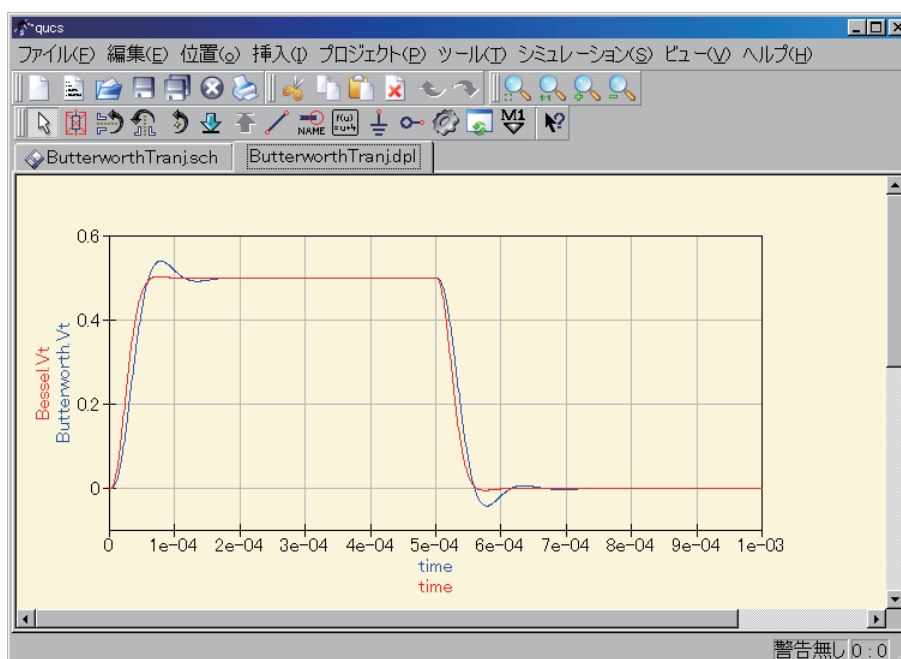


図 2.5: 問題 1 : Butterworth,Bessel 過渡応答結果

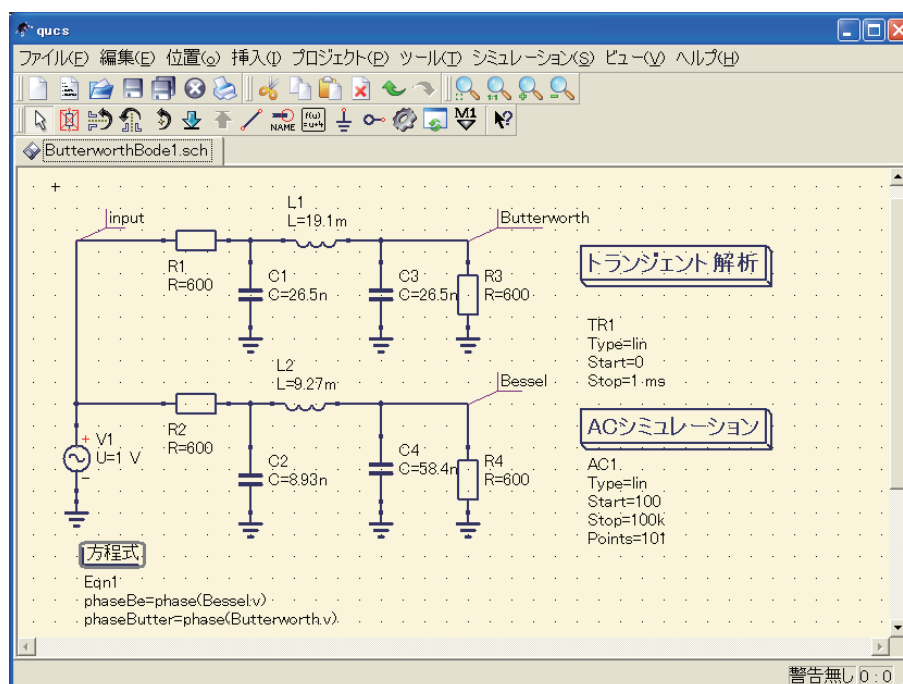


図 2.6: 問題 2 : Butterworth,Bessel ボード線図

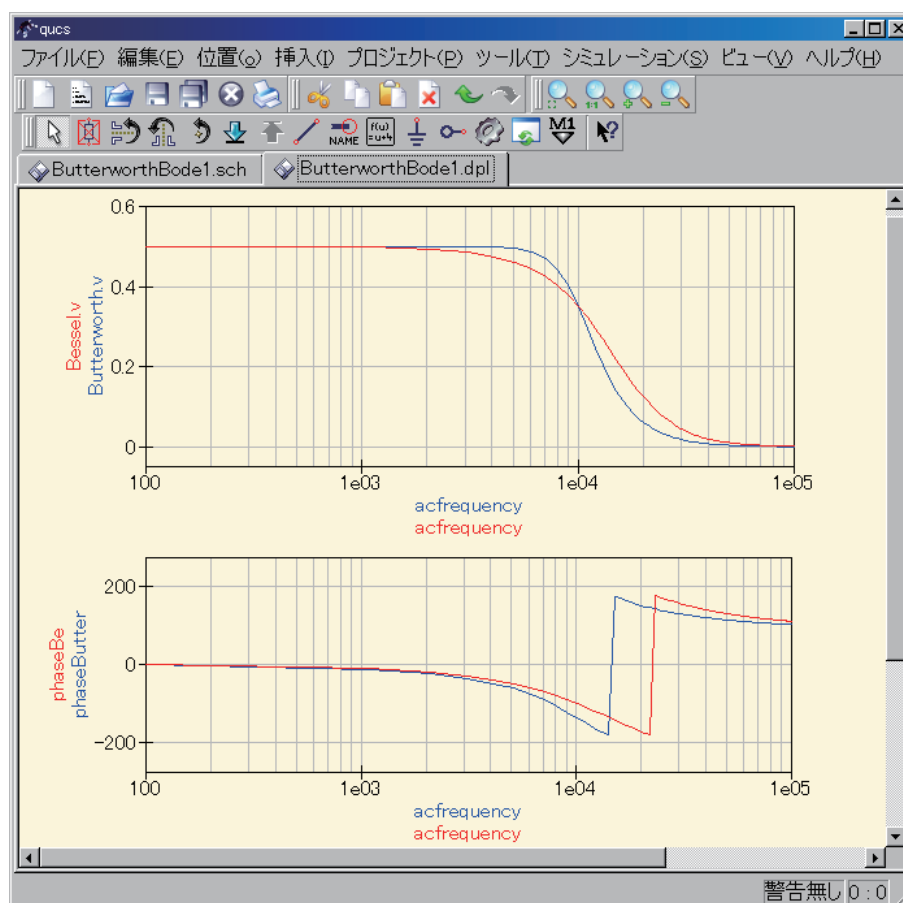


図 2.7: 問題 2 : Butterworth,Bessel 過渡ボード線図結果

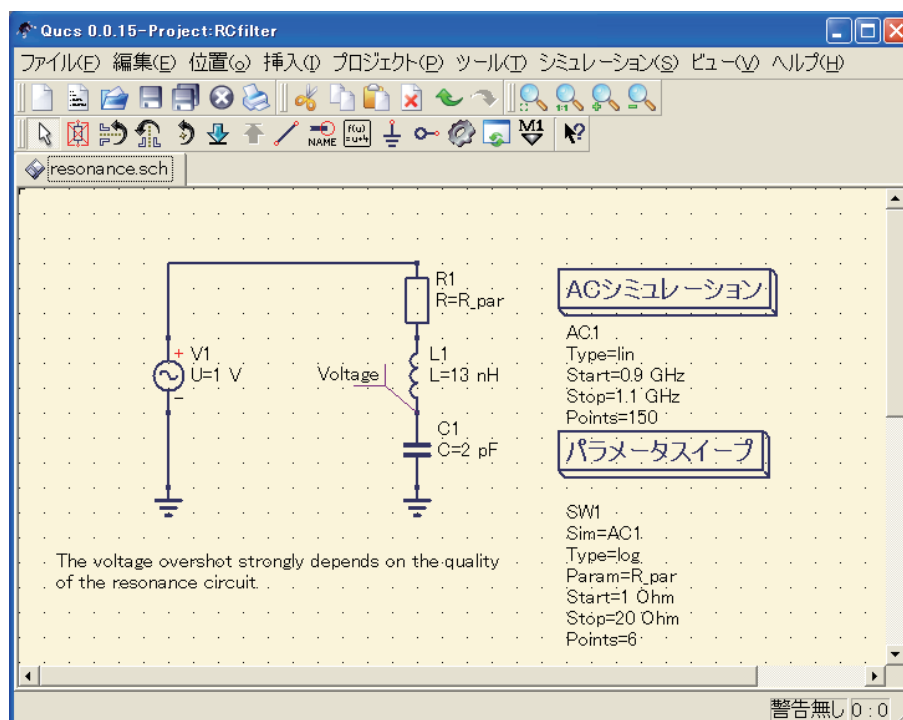


図 2.8: 問題 3 : LCR 共振回路

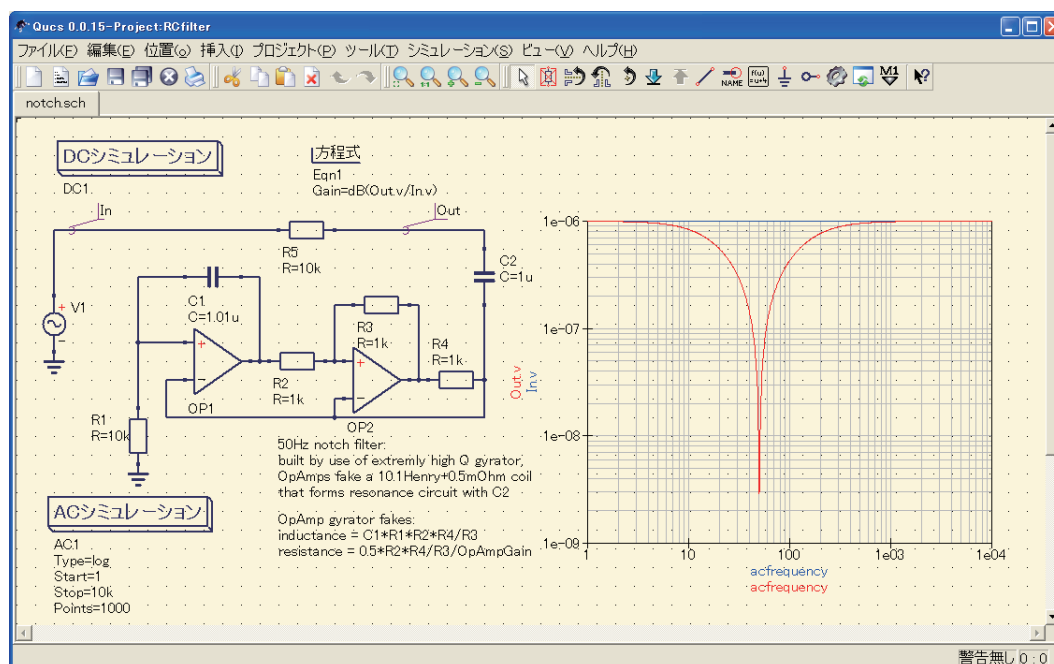


図 2.9: 問題 4 : ノッチ回路

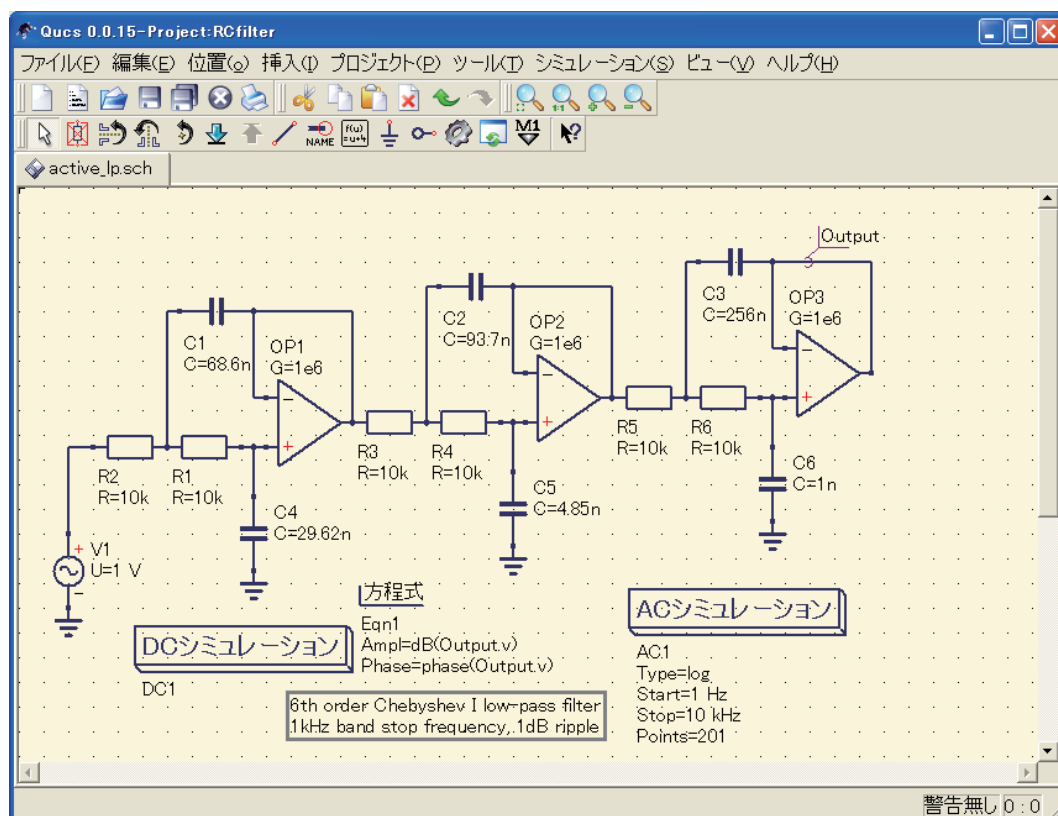


図 2.10: 問題 5 : chebyshev Low-pass filter

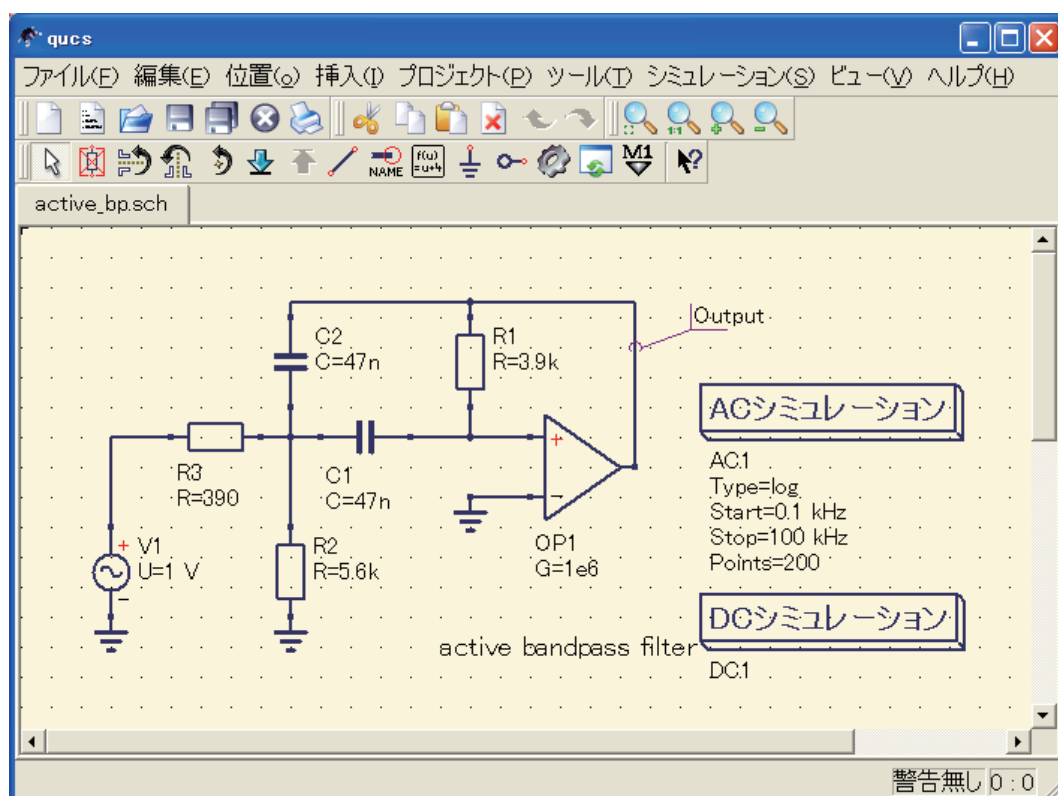


図 2.11: 問題 6 : active band pass filter

第 3 章

機械回路シミュレーション

3.1 機械回路の電気回路による解析

これらの機械回路（モビリティ）と電気回路の間には次のように関係つけることによって，機械系を電気回路と同様な解析手法によって解析できる．

表 3.1: 機械回路と電気回路の関係

	機械回路	電気回路
流通量	f : 要素を通る力	i : 要素を通る電流
位差量	v : 要素両端の速度差	v : 要素両端の電位差 (電圧)
ダンパ	$\lambda = 1/d$ d: 粘性抵抗 [$s \cdot kg^{-1}$]	電気抵抗 $z = R$ R: レジスタンス [Ω]
バネ	$\lambda = cs$ c: コンプライアンス [$N \cdot m^{-1}$]	インダクタンス $z = Ls$ L: ヘンリ [H]
質量	$\lambda = (ms)^{-1}$ m: 質量 [kg]	キャパシタンス $z = Cs^{-1}$ C: ファラッド [F]

3.1.1 機械回路の電気回路による解析 (1)

図 3.1 に機械的蓄音機（古いですが）の写真を示す．昔のレコードは，レコード盤に溝が切っており，音声信号はその溝のわずかな凹凸で記録してある．この機械的蓄音機は，レコード盤を回転させ，蓄音機に付属している針が回転するレコード盤の溝に触れると，レコード盤の回転に従って，針が振動する．その振動は記録されている音声信号を再現するもので，その振れをスピーカを通して空気振動として音を再生するものである．図 3.1 には，この機械的蓄音機のモデルを示す．これは質量と粘性抵抗（ダンパ）系をバネを介して左側からクランクで駆動する回路である．駆動源である溝の凹凸が $X_e \cos \omega t$ とすると，その時間微分 v_e が速度と

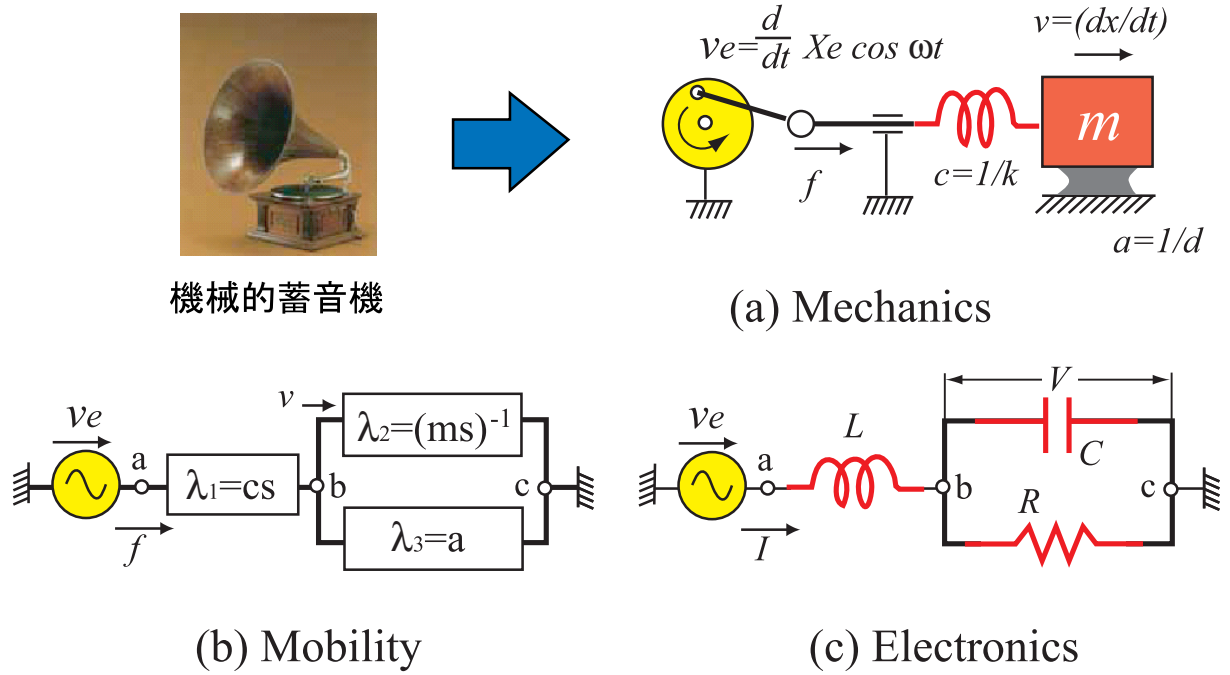


図 3.1: 蓄音機の例

なる．この溝の凹凸をなぞる針による振動が，サウンドボックスとラッパ内の空気（弾性と質量と粘性で表現する）を動かし，ラッパより速度 v の音波になって聞こえるモデルを表している．この時の f は針にかかる力に相当する．

（または，力を駆動力と考え，速度を求める問題とも考えられる．この場合，スピーカの駆動コイルに電流が流れ，ダイナミックコーンと外気の弾性，質量，粘性がこれに関係する場合である）

(a) は機械回路として表現した図である． v_e は既知の値とする．レコード溝に書き込まれた凹凸の変位を $X \cos \omega t$ とし，その時間微分である変位速度を示す．

(b) はこの機械回路をモビリティを用いて表現したものである．この機械回路のモビリティは，

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{1}{\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}} = cs + \frac{1}{ms + a^{-1}} = \frac{amcs^2 + cx + a}{ams + 1}$$

発生する力は，

$$f = \frac{v_e}{\lambda} = \frac{ams + 1}{amcs^2 + cx + a} amcs + 1$$

また，速度は，

$$v = v_e - \lambda_1 f = \frac{1}{amcs^2 + ca^{-1}s + 1} v_e$$

となる．

(c) は、電気回路として表現したものである．この場合、駆動電圧は、

$$V_e = \frac{d}{dt} X_e \cos \omega t = -\omega X_e \sin \omega t = \text{Real}(-\omega X_e e^{j\omega t})$$

となり、電圧 $(-\omega X_e)$ の正弦波交流となる．回路のインピーダンスは、

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C + R^{-1}} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$

回路に流れる電流 I は、

$$I = \frac{V_e}{Z}$$

となる．

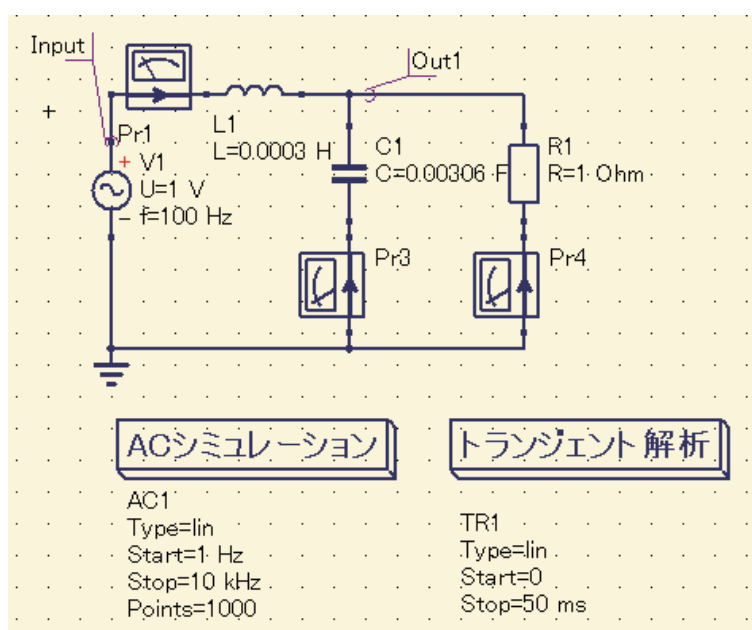


図 3.2: 蓄音器の電気回路シミュレーション回路

図 3.2 には等価な電気回路を示す．この例では各電気要素の値は、一例としての値であり根拠はない．回路図中にある Pr は電流計プローブである．本シミュレータでは導線中に流れる電流を計測する場合、このような電流プローブを入れる．シミュレーションは、周波数特性を調べる AC シミュレーションと、過渡現象を調べるトランジェント解析を行った．図 3.3 には、そのシミュレーション結果を示す．図左側は AC シミュレーションの結果である周波数特性を示す．縦軸の記号は回路図中の電気量に対応する．また図右側には過渡応答シミュレーション結果を示す．図右上側は入力電圧と、out1 と記号したノードの電圧波形の時間変化を示す．このときの入力電圧は正弦波で周波数は 100Hz とした．図右側の同じく下側は、各電流プローブで検出した電流の時間変化を示している．

3.1.2 機械回路の電気回路による解析 (2)

上記の例 1 ではモビリティ法を用いずとも簡単な微分方程式を用いて解は求められる．ここでは、図 3.4 に示すような、もう少し複雑な振動回路を例にとりてモビリティ法を用いて解析する例を示す．

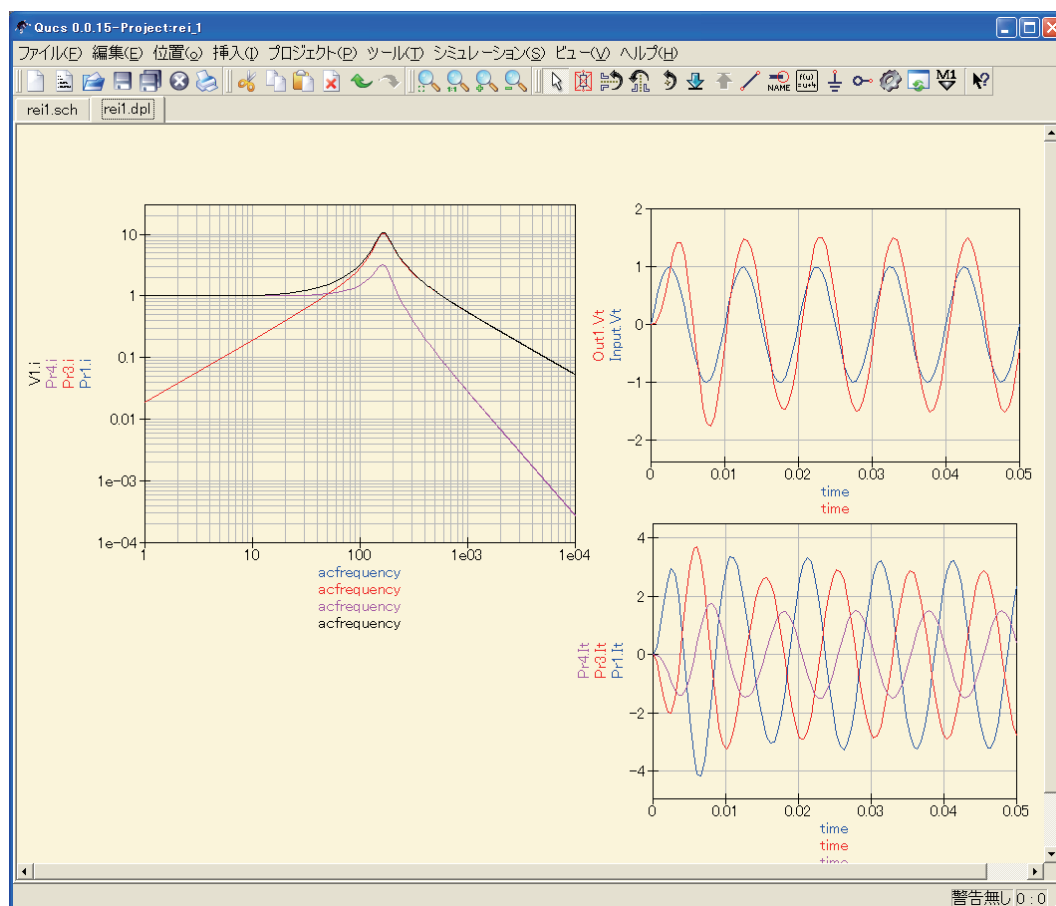


図 3.3: 蓄音器の電気回路シミュレーション結果

これは振動計の一種で，質量 1 が土台に板バネで接続されている．この質量 1 は図のようにバネとダンパによって土台と接続された場合，質量 1 に力 f が作用したときに質量 1 にいかなる速度 v が発生するかを求めてみる．図には，この振動計を電気回路モデルへと変換する過程を示してある．

質量 1 に加えられる力 F は土台に取り付けられた板バネ e で土台に力を及ぼし，質量 1 はダンパを介して，質量 2 に力を加える．質量 2 はバネ a によって土台に接続され，またバネ b を介して質量 3 とダンパ d に力を伝える．この場合，質量の取り扱いだが，質量に加わる慣性力は，土台（地球）に対しての加速度となるため，地面に並列接地することになる．図 3.4 の等価な電気回路では，質量は容量（キャパシタンス）に，バネはコイル（インダクタンス）に，ダンパは抵抗（レジスタンス）に，それぞれ対応させたものである．また，要素を通る力は，要素を通る電流に，速度差は，電位差（電圧）に変換される．

また，各機械要素のモビリティへの変換は，次のようになる．質量は重力単位系で表わされているため mg を g で除し m を求める．また，今回の場合，時間に関し振動する定常解を仮定しているため，演算子 s を $j\omega$ で置き換えた．

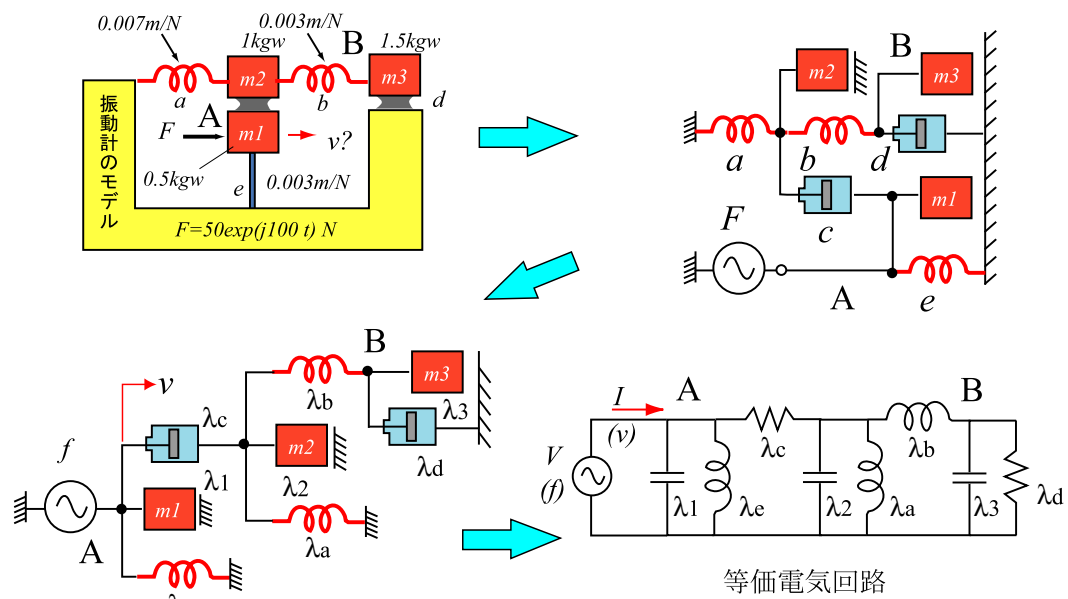


図 3.4: 機械回路例 (振動計)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0.5 \text{ kgw} = 0.5 \text{ kgw} / 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.051 \text{ kg} \\
 m_2 &= 1.0 \text{ kgw} = 1.0 \text{ kgw} / 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.102 \text{ kg} \\
 m_3 &= 1.50 \text{ kgw} = 1.0 \text{ kgw} / 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.153 \text{ kg} \\
 \lambda_1 &= (m_1 s)^{-1} = (j\omega m_1)^{-1} = (j\omega 0.051)^{-1} [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_2 &= (m_2 s)^{-1} = (j\omega m_2)^{-1} = (j\omega 0.102)^{-1} [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_3 &= (m_3 s)^{-1} = (j\omega m_3)^{-1} = (j\omega 0.153)^{-1} [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_a &= (c_a s) = (j\omega c_a) = (j\omega 0.007) [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_b &= (c_b s) = (j\omega c_b) = (j\omega 0.003) [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_e &= (c_e s) = (j\omega c_e) = (j\omega 0.003) [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}] \\
 \lambda_c &= \frac{1}{1750} [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}], \quad \lambda_d = \frac{1}{437.5} [\text{m} \cdot (\text{sN})^{-1}]
 \end{aligned}$$

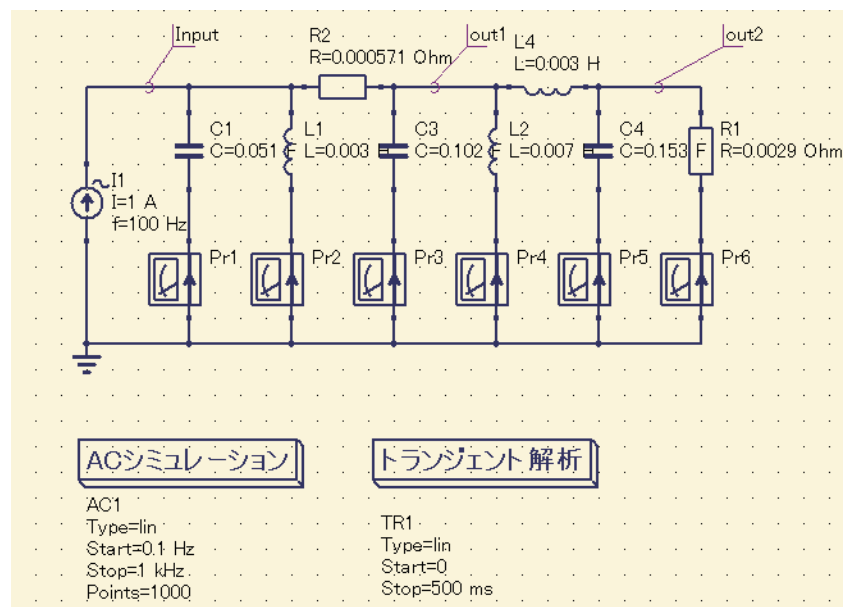


図 3.5: 機械回路例 (振動計)

図 3.5 は，図 3.4 のモデルを今回利用する電子回路シミュレータでのモデルに置き換えたものを示す．シミュレーションでは，振動数： $f = 15.9\text{Hz}$, $\omega = 2\pi f = 100\text{rad/s} \Rightarrow F = 50e^{(j100t)}[N]$ とした．

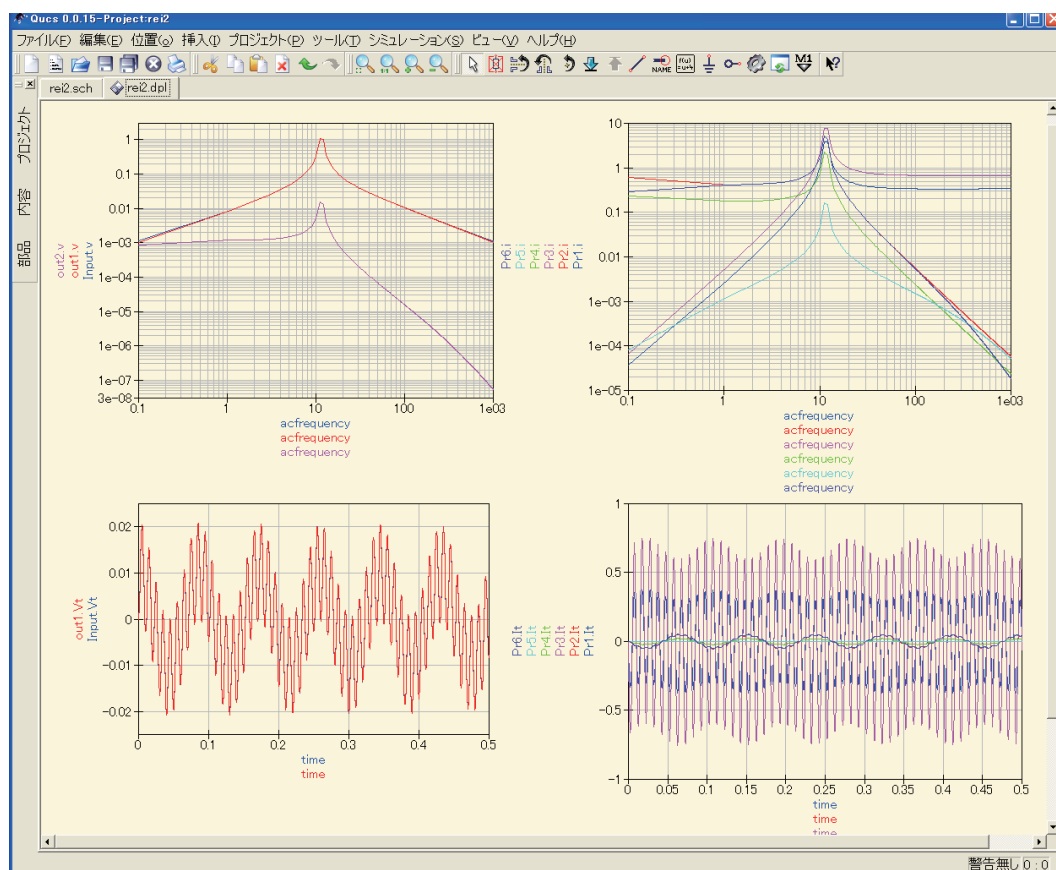


図 3.6: 機械回路例（振動計）のシミュレーション結果

図 3.6 には等価な電気回路とそのシミュレーション結果を示す．各電気要素の値は，計算したモビリティ要素の値としている．また回路図中にある Pr は電流計プローブである．シミュレーションは，周波数特性を調べる AC シミュレーションと，過渡現象を調べるトランジェント解析を行った．図??には，そのシミュレーション結果を示す．

図上側 2 つは AC シミュレーション結果の周波数特性を示す．左側が電圧のボード線図，右側が電流のボード線図である．線の色と，縦軸に書いてある電気量に対応する．電圧は機械系ではその点における速度，電流は力に相当する．また図下側には過渡応答シミュレーション結果を示す．入力に定電流源とし正弦波で周波数は 100Hz とした．左側が電圧の過渡波形，右側が電流の過渡波形である．

3.1.3 機械回路の電気回路による解析 (3)

次の例として，図 3.7 に示すクランク軸のねじり振動を求めてみる．軸上に 6 個の慣性体が等間隔に 6 個，最後に弾み車としての慣性体がつながっている．このような機械システムは，微分方程式を基に計算すると手間がか

かるが,機械回路に変換し,電気回路シミュレータを用いると簡単に結果を求めることが出来る.各パラメータは次のような値とする. $I = 0.3 \text{ kgm}^2$, $I_d = 0.9 \text{ kgm}^2$, $c = 6 \times 10^{-8} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \text{ N}^{-1}$, $c_d = 8 \times 10^{-8} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \text{ N}^{-1}$

図 3.8 には等価な電気回路を示す.各電気要素の値は,計算したモビリティ要素の値としている.また回路図中にある Pr は電流計プローブである.シミュレーションは,周波数特性を調べる AC シミュレーションと,過渡現象を調べるトランジェント解析を行った.図 3.9 には,周波数特性のシミュレーション結果を示す.クランク軸各点での速度に対応する,電気回路での各ノードでの電圧のボード線図を示す.また図 3.10 には,過渡応答波形のシミュレーション結果を示す.上図がクランク軸各点での速度に対応する,電気回路での各ノードでの電圧の値を,下図がクランク軸での各弾み車を駆動する力に対応する,電気回路での電流の値を,それぞれ示す.

問:(1) 各パラメータを変えた時どのような動作となるか各自確認してみよう.(2) 粘性抵抗を最終段のはずみ車に取付けると動作はどのようなになるか各自確認してみよう.

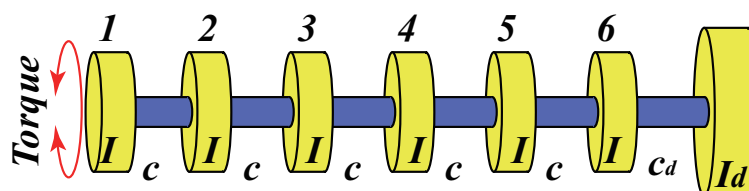


図 3.7: クランク軸のねじり振動モデル

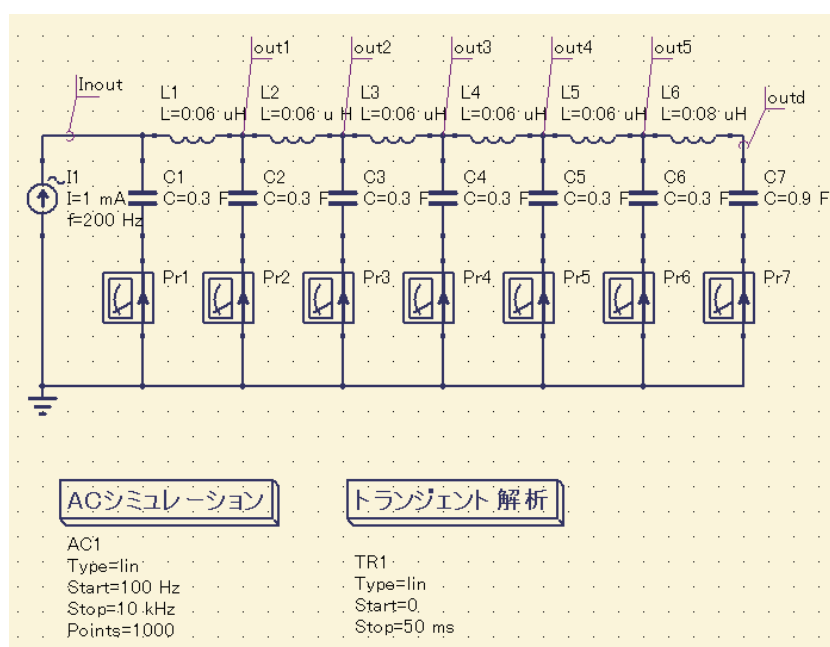


図 3.8: クランク軸のねじり振動モデルのシミュレーション回路

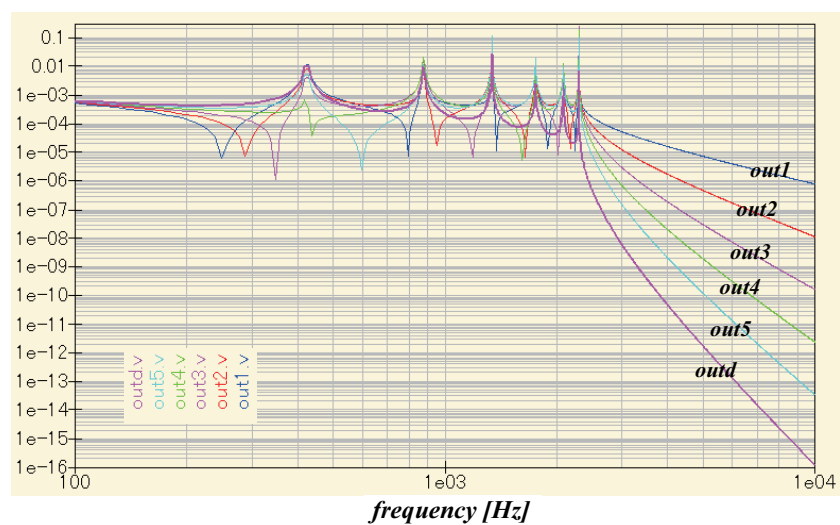


図 3.9: クランク軸のねじり振動モデルのシミュレーション結果（速度：BODE 線図）

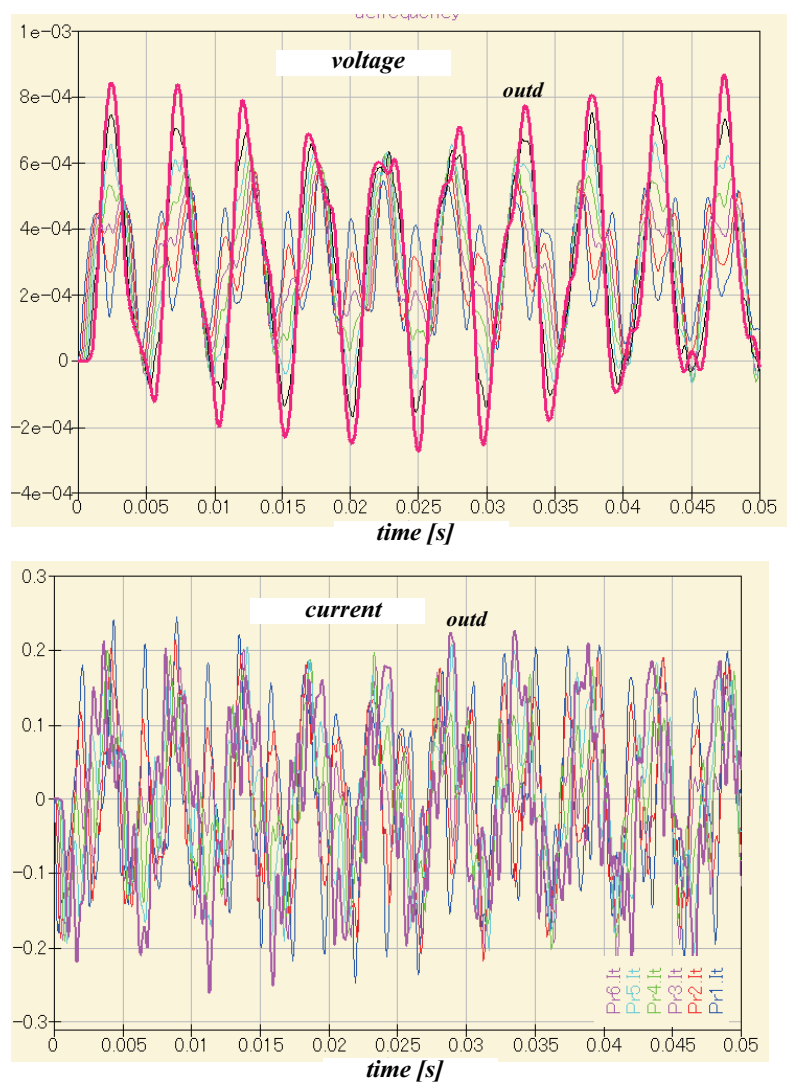


図 3.10: クランク軸のねじり振動モデルのシミュレーション結果（速度・力）

3.1.4 機械回路の電気回路による解析 (4)–熱伝導–

ここでは熱伝導の例について電気回路とのアナロジーに基づき解析を行ってみる．この熱伝導と電気量の関係はすでに示してあるが改めて示すと以下のようになる．

表 3.2: 熱伝導回路と電気回路の関係

	機械回路	電気回路
流通量	q : 熱量	i : 電流
位差量	T : 温度	v : 電位差 (電圧)
	R : 熱抵抗 $q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2)$	R : 電気抵抗 $i = \frac{1}{R}(v_1 - v_2)$
	C : 熱容量 $q = C \frac{dT}{dt}$	C : キャパシタンス $i = C \frac{dv}{dt}$
	対応なし	L : インダクタンス

解析例として図 3.12a) に示すような 2 層からなる断熱壁について行ってみる．これは 2 つの材料によって左側の環境と右側の環境の間での温度を断熱することを目的にしたものである．例えばロケットエンジンのノズルの内側の外側，または住居での外壁と内壁との関係と考えてもよい．そのような壁を 2 つの材料で構成した場合どのような温度変化，熱流量があるかをシミュレートするモデルである．

ここで熱抵抗について述べる．熱抵抗 R は式 (3.1.4) のように与えられる．これは図 3.11 に示すようにある物体の左側の温度が T_1 ，右側が T_2 のとき，この物体を通して伝わる熱流量 q があるとき，この熱流量の通しにくさを示す．これはある物体に電圧差を与えた場合に，そこに流れる電流との関係を示すのが抵抗となるのと同じである．さて，熱流量 q は，接触する表面積 A に比例し，また厚さ l に反比例する．このときの比例定数を k とすると熱抵抗 R は式 (3.2) となる．この k は物質による値で thermal conductivity とよばれる．

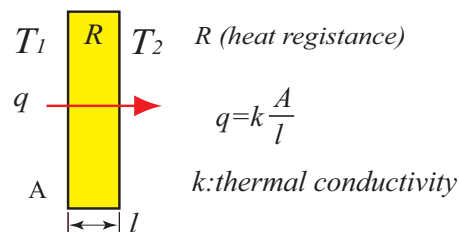


図 3.11: 熱抵抗

$$q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2) \quad (3.1)$$

$$q \propto \frac{A}{l}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = k \frac{A}{l} \quad k: \text{thermal conductivity} \quad (3.2)$$

また，流体もしくは固体で厚さ方向に熱が伝達するような場合は，上記の厚みは規定できずただ熱抵抗は面積に反比例することから次のようにする．

$$\frac{1}{R} = hA \quad h: \text{heat-transfer coefficient} \quad (3.3)$$

さて，図 3.12 の問題に戻ることにする．図の a) は熱伝導モデル，b) はその電気回路モデルを示す．

ここで C3, C5 は断熱壁を構成する材料の熱容量を表す．熱容量は材料の比熱と体積を掛けたものとなる．ところで，一般的に断熱壁の材料には厚さがあり，当然厚さ方向に温度勾配が生じると考えるのが当然であろう．図 a) では C3, C5 の材料には厚みがありあたかも壁の厚みのようである．しかしながら，取りあえずこの例では集中定数系として対象を扱うものとする．即ち断熱材料は熱抵抗と熱容量の 2 つのパラメータで表わされる集中定数系として表現する．断熱材料の温度の厚さ方向の温度勾配はなく，一様な温度分布であり，通り抜ける熱量は材料両側の温度差をその材料の熱抵抗で除したもので表わせるとする．このような集中定数系とすると図 a) のモデルは，抵抗とキャパシタンスからなる図 b) のような電気回路モデルとして表現できることになる．もちろん繰り返すようだが，実際の材料には厚さがあり厚さ方向に温度勾配がある連続体としての取り扱いが必要になる．この連続体としての取り扱いは後に述べることにする．

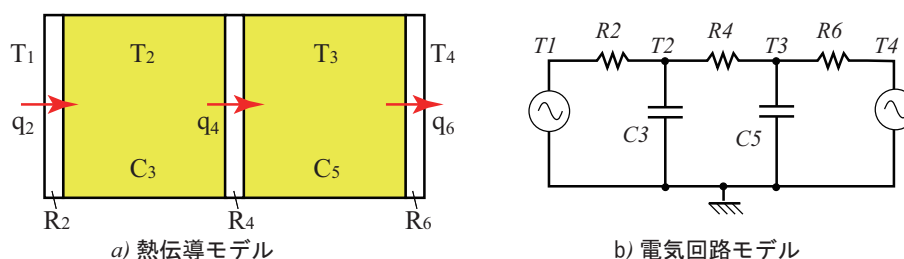


図 3.12: 熱伝導モデル

図 3.13 はこの電気回路モデルを電気回路シミュレータに置き換えたものである．図では，電流すなわち熱流量を測定する目的で電流計 Pr を回路中に挿入してある．また回路パラメータは取りあえず適当に決めたものであり，根拠はない．図 3.14 にはシミュレーション結果を示す．シミュレーションでは 5 秒間 T1 が 100 度となりその後 0 度となる．また T4 は 1 度と一定とした．図の横軸は時間を示す．図の曲線で上から，T1, T2, T3, T4 を示す．5 秒間の間温度が上昇し，後温度が低下する様子がわかる．図 3.15 は，その時の熱流量の時間変化を示す．

この他，図 3.16 には反対側の壁の温度 T4 が時間によって変化する場合をシミュレーションした．T4 は 0.2Hz の周期で正弦波状に 10 度変化するとした．図 3.17 にはシミュレーション結果を示す．図 3.17 は，各場所での温度の時間変化を示す．図の曲線で上から，T1, T2, T3, T4 を示す．図 3.18 は，その時の熱流量の時間変化を示す

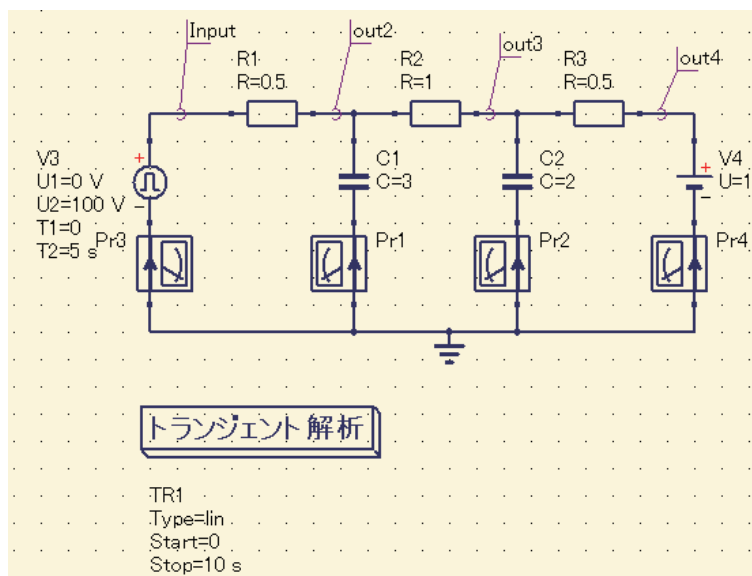


図 3.13: 熱伝導モデル (1) 電気回路

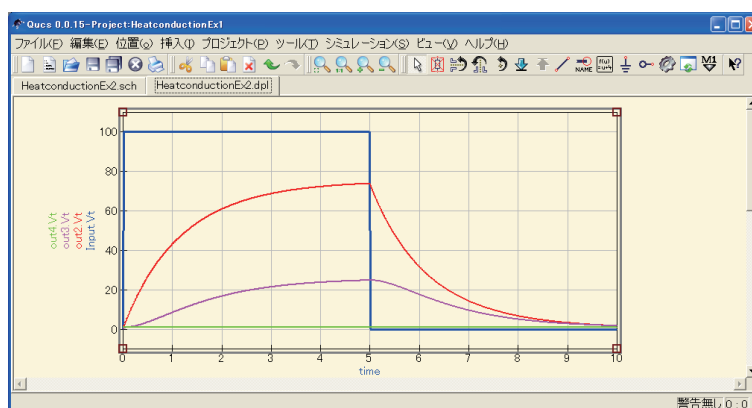


図 3.14: 熱伝導モデルシミュレーション結果 (1) 温度変化

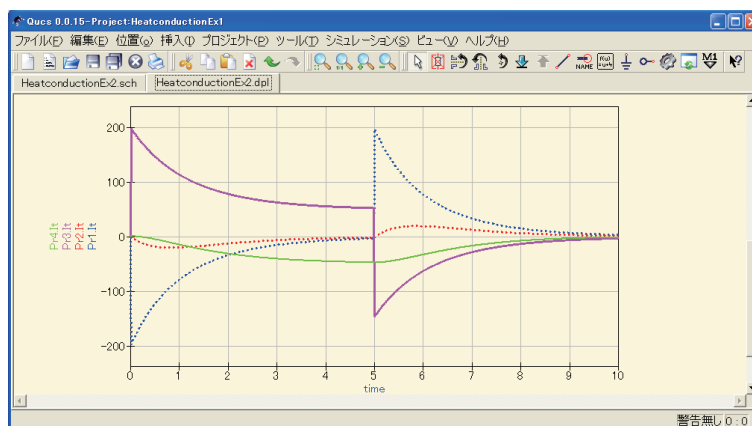


図 3.15: 熱伝導モデルシミュレーション結果 (1) 熱流量変化

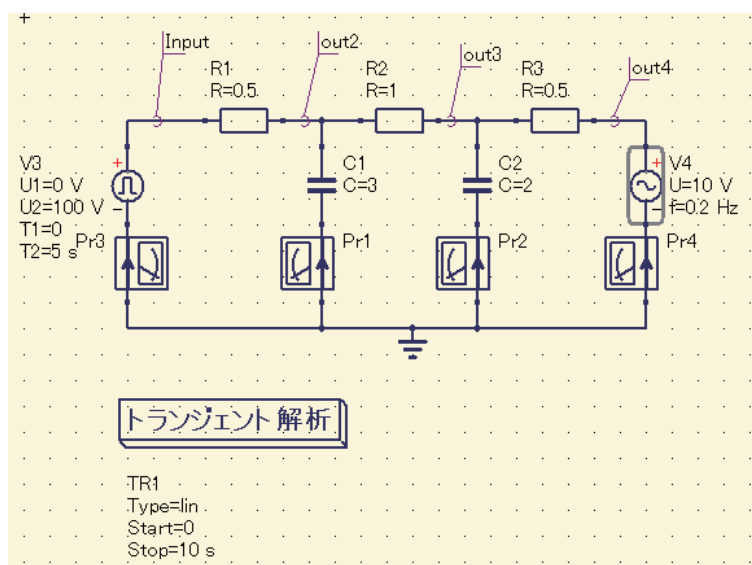


図 3.16: 熱伝導モデル (2) 電気回路

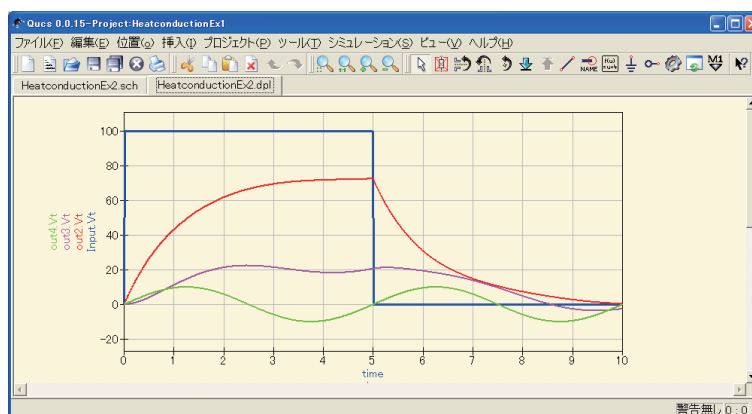


図 3.17: 熱伝導モデルシミュレーション結果 (2) 温度変化

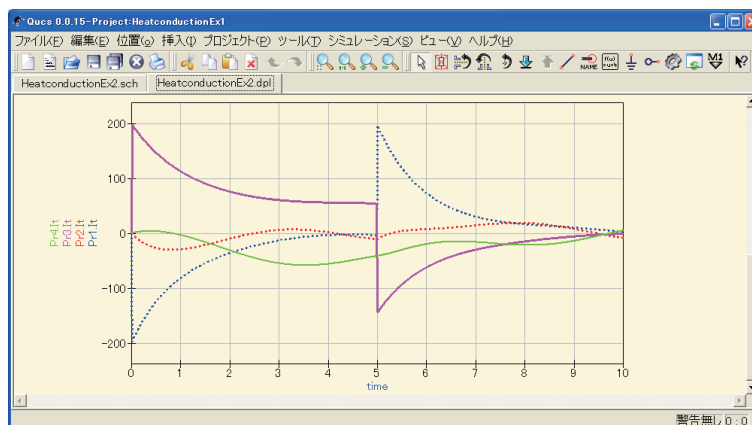


図 3.18: 熱伝導モデルシミュレーション結果 (2) 熱流量変化

第 4 章

機械回路の電気回路への変換方法

機械システムを電気回路に変換する方法を図を用いて説明する．機械回路から電気回路への変換は難しそうにみえるが，コツを知ってしまえば非常に簡単にできる．ここではその変換方法について説明する．

図 4.1 には機械システムの例を示す． m は質量， b は粘性抵抗， k はばね要素を表す．また， m_2 には外力 f_7 が加わっている状態を示す．

変換は，まず始めに質量 m の配置を行う．質量は電気回路だとキャパシタンス C に対応する．図で質量 m_1, m_2, m_3 はそれぞれキャパシタンス C_1, C_2, C_3 に対応することになる．ここで，質量に対して加速度等の関係での基本となる慣性系は地球である．すなわち質量はグラウンドに対して常に並列に接続となる．このことは電気回路に変換した場合，キャパシタンス C の一方の端子はグラウンドに接続し，またキャパシタンスのもう片方の端子は，電気回路の節（ノード）に接続されることになる．このときこの接続するノードが電気回路に変換する場合の節点（ノード）となるため，ここでは各質量に対応するノードの記号を a, b, c とする．

まず，図 4.2a) には，この関係を用いてキャパシタを配置した状態を示す．キャパシタンス C_1, C_2, C_3 が揃ってグラウンドに接続され，もう一方の端子が a, b, c のノードとなっている．次に各要素を，その接続状態に応じて，各ノード間およびノードとグラウンド間とを結ぶように配置することになる．例えば，粘性抵抗 b_4 は抵抗 R_4 に変換し，図 4.1 に示されるとおり，質量 m_3 とグラウンド間を接続する．即ちノード c とグラウンド間に配置すれば良い．同様に b_{13} は質量 m_1, m_3 間に存在する粘性抵抗であるから，ノード a と c 間に R_{13} を配置する．また質量 m_1, m_2 の間にあるバネは，ノード a, b 間に L_{13} を配置する．このように粘性抵抗は電気抵抗に，バネはインダクタンスに変換して，それぞれ対応するノード間に配置する．

最後に外力 f_7 は質量 m_2 すなわちノード b に力に対応する定電流源を挿入することでこと図 4.2b) に示すような等価回路が完成する．尚，外力を駆動速度で入れる場合，対応する電気量は電圧源となる．

機械回路の電気回路への変換手順

1. 質量 m をキャパシタンス C に置き換え配置を行う
2. キャパシタンス C の一方の端子はグラウンドに接続する
3. キャパシタンス C の他の端子はノード記号を付ける (a, b, c, \dots など)
4. バネ要素, 粘性抵抗要素をそれぞれ, インダクタンス, 抵抗に変更する
5. バネ要素, 粘性抵抗要素は, 上記ノード間, ノードとグラウンド間を接続しているはずであるから, それらを結ぶように配置する
6. 外力 (もしくは強制変位速度) は接続するノードに, 力 (もしくは速度) に対応する電流源 (もしくは電圧源) を接続する

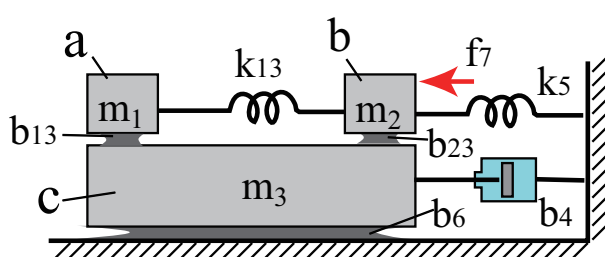


図 4.1: 機械システムの例

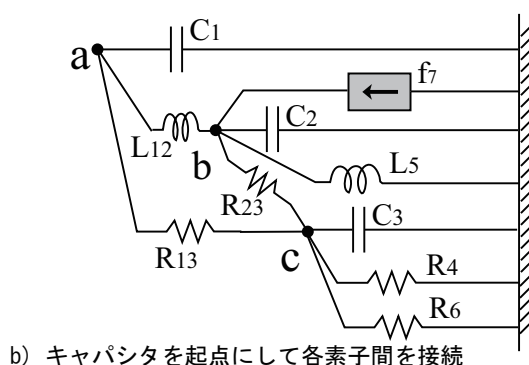
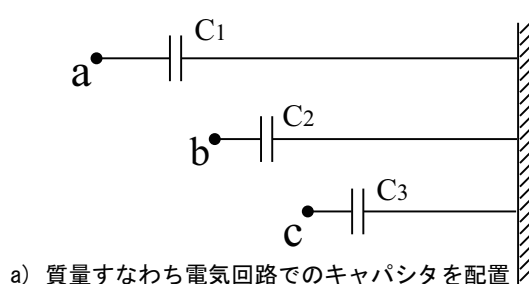


図 4.2: 機械システムを電気回路への変換方法

さて, 次は電気回路の双対性について述べる. これは電気回路では電圧と電流の関係について興味深い関係があり, 互いの変換することが可能である. これは機械回路で考えると力 i と電流 i の関係が, 力 i と電圧 i の関係としてもモデル化できることに相当する. この問題について次の節で述べることにする.

4.1 双対回路

電気回路において双対性 (duality) と呼ばれる性質がある．これは電圧で成立している関係が電流においても成立すること，また直列で成立している関係が並列でも成立していることを表す．例として図 4.3 には R, L, C による直列回路と並列回路を示す．ここで図 4.3a) では，電源として電圧源とし，Kirchhoff の ” 電圧の法則 ” を適用して方程式を作る．また，図 4.3b) では電源として電流源とし，Kirchhoff の ” 電流の法則 ” を適用して方程式を立てる．

(1) 図 4.3a) 電圧の釣り合い (Kirchhoff の電圧則) から

$$v_l + v_r + v_c = v(t) \quad (4.1)$$

即ち，

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t) \quad (4.2)$$

となる．次に，

(2) 図 4.3b) 電流の釣り合い (Kirchhoff の電流則) から，

$$i_l + i_r + i_c = i(t) \quad (4.3)$$

即ち，

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} i + \frac{1}{L} \int v dt = i(t) \quad (4.4)$$

となる．

式 4.2 と式 4.4 を比べてみると表 4.1 の対応で互いに同じ方程式となっていることがわかる．即ち，表 4.1 の対応で置き換えた関係は，同じ方程式となることから，一方の関係でのいろいろな動作特性が明らかになれば，同時にもう一方の関係が自ずと明らかになる．

この時の回路 (a) と回路 (b) は双対回路 (dual network) であるといわれる．

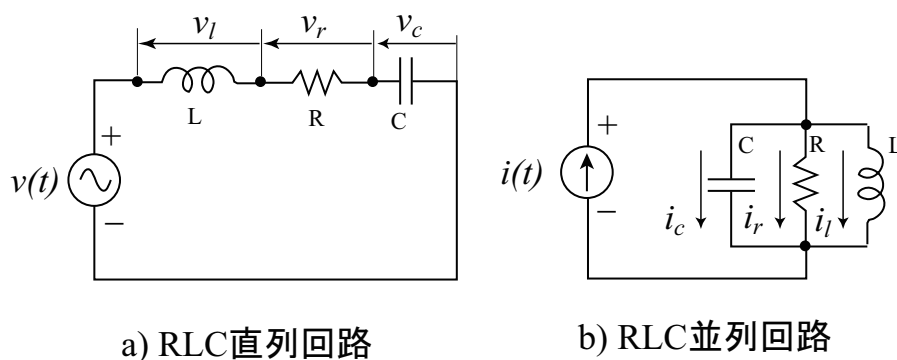


図 4.3: 双対回路

表 4.1: 双対性 (duality) の関係

電圧 V	電流 I
電圧源 E	電流源 J
インピーダンス Z	アドミッタンス Y
インダクタンス L	キャパシタンス C
抵抗 R	コンダクタンス G
直列	並列
短絡	開放
閉路 (loop)	接点 (node)
T 型回路	π 型回路

4.1.1 双対回路の作り方

大部分の電気回路には双対回路が存在し、この双対回路は回路方程式から求める方法と、図式的に求める方法がある。ここでは図式的に求める方法について示す。例として図 4.4 について示す。この回路例では、独立な回路ループは 1 つであり、ループ内の点 a 、とループ外の点 b を選ぶこととする。そして、つぎに示す手順で回路を構成する。

1. 独立な回路ループの中に点 a 、点 b を取る。これらの点が双対回路のノードとなる。
2. $a \sim b$ 間を結ぶ線（図では点線）が回路要素を通過するように結ぶ
3. このとき a, b 間を結ぶ線（図では点線）が変換後の配線となる
4. また点線と交差する要素を表 4.1 に示す対応する要素に変換する
5. 要素の変換で電圧源は電流源となり、電流源はと電圧源なる。

この例では、独立ループは 1 つだけであったが、図 4.5 には独立ループが 2 つある場合を示す。この場合、各ループ内部に 2 点取り、これ以外の外部に 1 点を取る。すると、これらが変換後のノードとなることは同様である。

双対性がない非平面回路

また、大部分の回路（平面回路）はその双対回路を有するが、時として有しないものもある（非平面回路）。この非平面回路とは回路の枝 (branch) が交差することなしには、平面図形として表しえないものを示す。図 4.6 には、その一例を示す。

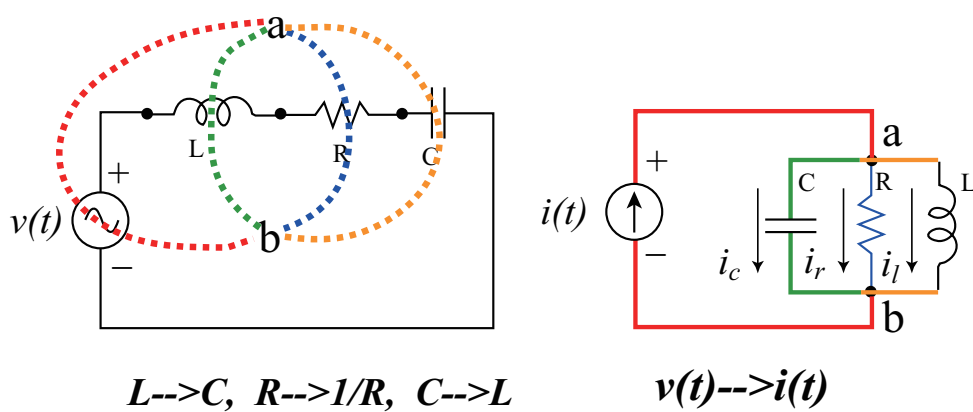


図 4.4: 双対回路変換その 1

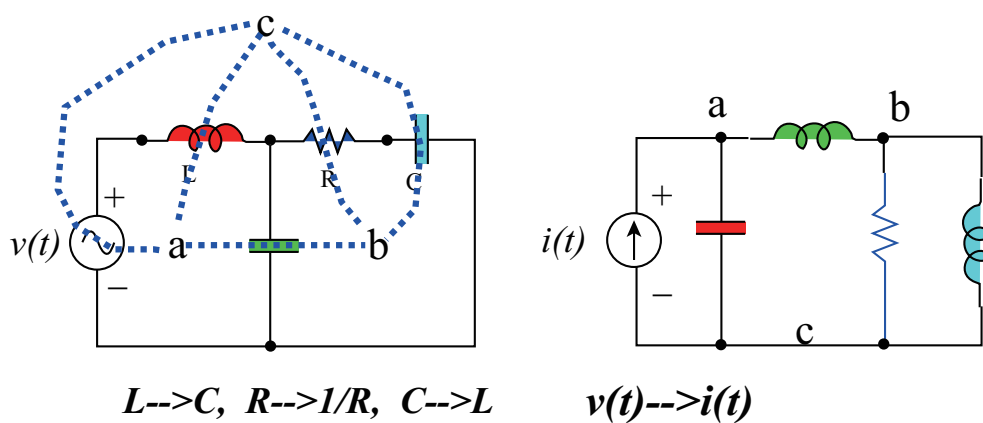


図 4.5: 双対回路変換その 2

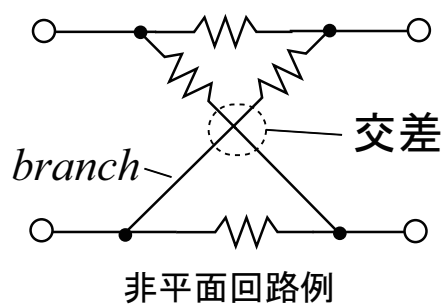


図 4.6: 非平面回路

4.1.2 双対回路と機械回路

1.1 節で機械系と電気系の物理現象を記述する方程式が下記のように同じとなるため，両者の間にはアナロジーが成立し，質量と粘性抵抗およびバネから構成される機械システムは，電気回路として記述可能なことを示した．これを再録すると次のようになる．

力の平衡から

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow f = m \frac{dv}{dt} + dv + k \int v dt$$

キルヒホッフの電流保存則 (KCL) から

$$f = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow f = C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int v dt$$

また新たに，双対回路からは対をなす電気回路が存在することが明らかになった．上記の例の並列回路は，双対回路によって直列回路となる．ちなみにこの回路の回路方程式は，キルヒホッフの電圧則 (KVL) から

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \Rightarrow v = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

となる．これからも明らかなように上記 3 つの方程式は物理量は異なるが方程式は同じになり，アナロジーが成り立つことがわかる．これまでに述べてきた力～電流での関係で機械回路と電気回路のアナロジーを行う方式は $f \sim i$ アナロジーと呼ばれ，今回電気回路の双対性から説明した方式は $f \sim v$ アナロジーと呼ばれる．上記の関係を図 4.7 に示す，また対応する関係を表 4.2 に示す．

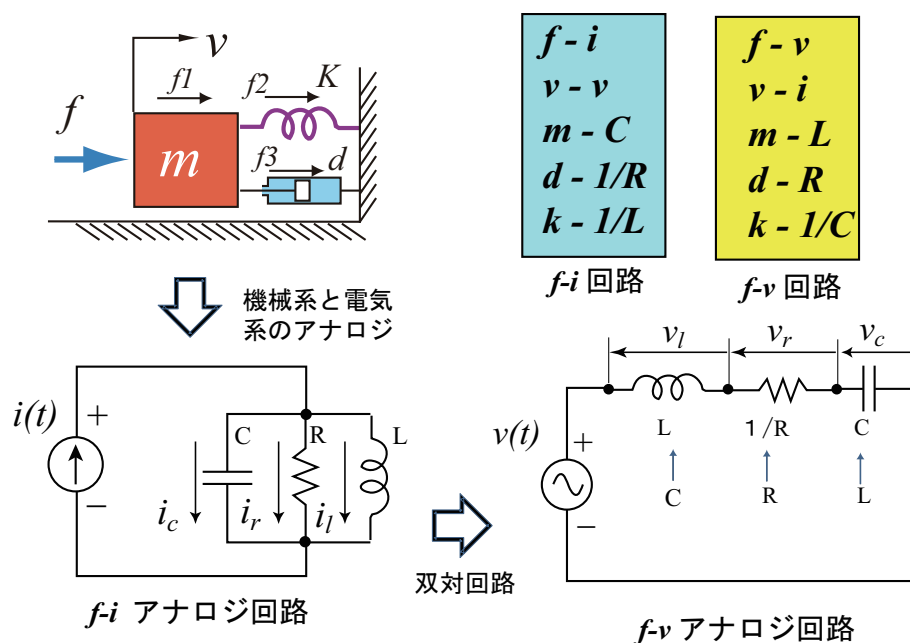


図 4.7: 機械回路と電気回路，その双対回路との関係

表 4.2: 機械回路と電気回路のアナロジ

機械回路	力-電流アナロジ	力-電圧アナロジ
力 $f(t)$	電流 $i(t)$	電圧 $v(t)$
速度 $v(t)$	電圧 $v(t)$	電流 $i(t)$
質量 M	キャパシタンス C	インダクタンス L
粘性抵抗 d	コンダクタンス R^{-1}	レジスタンス R
バネ K	逆インダクタンス L^{-1}	逆キャパシタンス C^{-1}

双対性について

数学，物理学，工学などのさまざまな分野で，2つの定理とかの問題が対をなしてあらわれることがある．これらは単なる偶然ではなく双対性と呼ばれる一般的原理によって関係づけられることが多い．例として，図形の双対性，グラフ理論での双対性，理論における双対性，線形計画法にける双対原理など数多くの例がある．双対性については下記の書物に詳しい．興味のある方は読んで見てください．

高橋秀俊：数理と現象，岩波書店

物理学で良く我々がお目にかかるのは，これまでに示した電気回路の例であるが，電気回路と磁気回路の双対性も有名である．

一般に全ての静電エネルギー変換機構では

- 力 \Rightarrow 電圧
- 速度 \Rightarrow 電流

という対応関係が成立する．静電的変換器には，静電型マイクロホン，ピエゾ効果を利用したマイクロホン，イヤホン等がある．また電磁的なエネルギー変換機構に関しては，

- 力 \Rightarrow 電流
- 速度 \Rightarrow 電圧

という対応関係が成立する．電磁的な変換器としては，DC モータ，発電機，ダイナミックスピーカーなど各種ある．

第 5 章

機械－電気混合システムの回路解析

これまでは機械システムを電気回路に変換して、そのアナロジーを用いて機械回路の特性を電気回路シミュレータを用いて解析を行った。この電気回路に変化して解析を行う方法は機械系と電気系が混合しているシステムの解析にちょうどよい。ここでは機械－電気混合システムの例として、DC モータとバネ剛性を持つ軸によって慣性ローターが接続されたシステムの解析を行う。

5.1 DC モータの基礎方程式

まず手始めに、DC モータの解析を行う。図 5.2 に DC モータの等価回路を示す。モータは、電機子のインダクタンス L_a とその抵抗成分 R_a とローターの慣性モーメント J とから表せる。モータには、(1) 電流を流すと回転トルクを発生して回転するモータの働きと、(2) 回転させると電圧を発生する発電機の働きの 2 つの働きがある。先ずはじめに、このモータの特性を解析するための基礎方程式について述べる。

モータの働き

まず、DC(直流) モータは、静止部分と回転部分から構成される。静止部分は、ステータ (stator) と呼ばれ、2 個の永久磁石によって界磁システム (field system) を構成している。回転部分は、ローター (rotor) と呼ばれ、電流が流れる巻線からなる電機子 (armature) から構成される。原理は図 5.1 に示す。その原理は、フレミングの左手の法則として有名であるが、これは磁界中を運動する荷電粒子が、磁界から受けるローレンツ力がその基本である。DC モータの原理図で説明すると、2 つの永久磁石間には磁界 (B) が存在し、その磁界中にある電機子 (armature) 導線に電流 (I) が流れる、即ち荷電粒子である電子が流れることで、導線に力 (F) が発生することである。このローレンツ力を数式で示すと次のようになる。

$$F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

$$F = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Leftarrow \quad \mathbf{E} = 0 \quad (5.2)$$

ここで、 F は荷電粒子が受ける力 (これをローレンツ力と言う)、 E は電場、 B は磁束密度 (つまり磁場)、また q は荷電粒子の持つ電荷で v は荷電粒子の速度であるから、導線中を流れる電流のことである。また、 \times は外積である。また今回電場はないとすると式 (5.2) となる。ちょうど電流の方向と磁界の方向の外積の関係、電流と磁界が作る平面に直交する方向に力が発生するのがわかる。この力のため、電機子には回転モーメントが発生する。しかしながら、常に一定方向の回転モーメントを発生するには電機子が回転しても、常に一定方

向の電流が流れるように制御する必要があり，このためブラシ (brush) と整流子 (commutator) が必要となる．また，モータには磁極の数によって，2 極モータや 3 極モータ等がある．

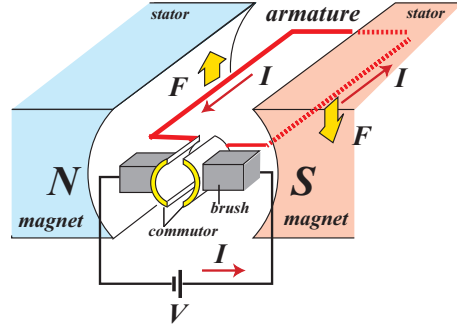


図 5.1: DC モータの原理

まずモータ特性として，発生トルク T と電流 i_a の関係を式 (5.3) に示す．発生するトルクは流れる電流に比例することを表し，その比例定数が K_T である．

発電機の働き

次に発電機の特性を示す．これは電機子が回転角速度 ω で回転すると，電機子コイル内部を横切る磁束が時間的に変化をするため（電磁誘導），逆起電力 e が発生し，角速度と逆起電力の関係が式 (5.4) のように比例することを表す．その比例定数が K_E である．

$$T = K_T i_a \quad (\text{motor}) \quad (5.3)$$

$$e = K_E \omega \quad (\text{generator}) \quad (5.4)$$

また，モータの慣性モーメント J と回転角速度 の関係は，力学の方程式から以下ようになる

$$T = J \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{dynamics}) \quad (5.5)$$

5.1.1 DC モータの等価回路への変換

この式 (5.5) と式 (5.3) の関係から次式が得られる．

$$K_T i_a = J \frac{d\omega}{dt} \quad (5.6)$$

$$i_a = \frac{J}{K_T} \frac{d\omega}{dt} \quad (5.7)$$

この式 (5.7) 両辺を時間積分して ω を求めると，

$$\omega = \frac{K_T}{J} \int_0^t i_a dt \quad (5.8)$$

となる．この式に，角速度 ω と逆起電力 e の関係式 (5.4) を組み合わせると，モータ電機子に流れる電流 i_a と，逆起電力 e の関係は次のように表わせる．

$$e = \frac{K_T K_E}{J} \int_0^t i_a dt \quad (5.9)$$

ここで電流の時間積分の意味を考えると、これは電荷 q を表すことになる。この電荷 q は、静電容量 C のキャパシタンス素子と、これに加わる電圧 e とのあいだには、次のような関係がある。

$$q = eC \Rightarrow q = \int_0^t i_a dt = eC \quad (5.10)$$

この関係を式 (5.9) に当てはめてみる。すると式 (5.9) は、静電容量 C_J のキャパシタンスに対して電流 i_a が流れ込み、その時に発生する電圧 e の関係を示す等価な回路となることがわかる。また、等価静電容量 C_J (慣性質量 J に対応) は、負荷慣性モーメント J とトルク定数 K_T と逆起電力定数 K_E を用いて次のように表せる。

$$C_J = \frac{J}{K_T K_E} \quad (5.11)$$

また発生する電圧 e との関係は次のようになる。

$$e = \frac{1}{C_J} \int_0^t i_a dt \quad (5.12)$$

このことはモータと等価の電気回路では、機械系の慣性モーメントは、電気系のコンデンサで置き換えられることを示している。これはコンデンサが電気系のエネルギーを電荷として蓄積するように、モータのロータは回転エネルギーを蓄えることを表す。

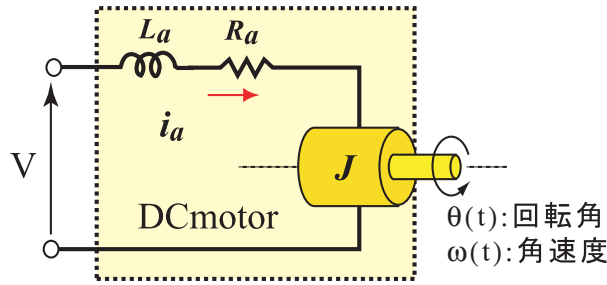


図 5.2: DC モータの等価回路

5.1.2 対応する機械量と電気量との相互変換係数

モータのように機械系と電気系が混合している場合、電気回路に変換したときに、対応する機械量と電気量とを互いに関係付ける必要がある。そこで再度式 (5.3) と式 (5.4) を注目すると、式 (5.3) は、機械量 T と電気量 i を変換定数 K_T で関係付ける式であり、 K_T はこの両者を関係付ける変換定数であると考えられる。同様に式 (5.4) は、機械量 ω と電気量 v とを変換定数 K_E で関係付ける式であり、 K_E はこの両者を関係付ける変換定数であると考えられる。即ち、機械系と電気系の互いの量は、図 5.3 に示すように変換係数 K_T, K_E を通して相互変換できることを表す。

このように、このモータと機械系の電気系のシステムにおいて、機械－電気システムを統合的に表現した場合、 K_T は電気回路の電流と機械系のトルクの変換係数を表し、 K_E は電気回路の電圧と機械系の角速度の変換係数を表す。また、 K_T, K_E の値はモータの特性表に記載されている。 K_T はトルク定数 $[Nm/A]$ 、 K_E は逆起電力定数 $[V/rpm]$ と呼ばれている。またこの両者の値は、下記単位で表現した場合には同一の値となる。

$$K_T[Nm/A] = K_E[Vs/rad] \quad (5.13)$$

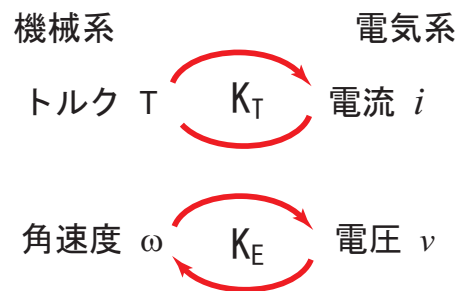


図 5.3: 機械系と電気系の変換係数

5.1.3 DC モータの等価回路

ここでモータの等価回路を図 5.4 に示す．ここで L_a はモータ巻き線のインダクタンス， R_a はモータ巻き線の抵抗成分である．インダクタンス成分は，モータの速度変動が激しく，それに応じて電流の変化も大きい場合には，巻き線のインダクタンス成分を考慮する必要がある．しかし実用的には，インダクタンス成分を無視しても影響がない場合がほとんどである．また図 5.4 の中のダイオードはモータのブラシの接触抵抗を表している．通常数 V 程度の電圧降下があるためここではダイオードを組み合わせで示してある．またローターの慣性成分はキャパシタンスで表現できることから DC モータの等価回路は最終的に図 5.4 右側のように表せる．

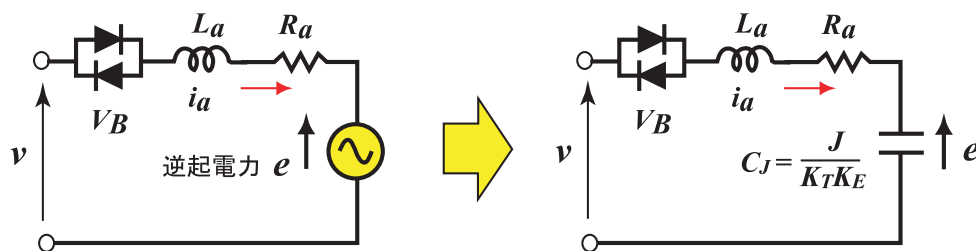


図 5.4: DC モータの電氣的等価回路

DC モータの電氣的等価回路で用いている記号

- L_a : モータ電機子のインダクタンス成分
- R_a : モータ電機子の抵抗成分
- C_J : モータローターの慣性成分 $C_J = J / K_T K_E$
- K_T : モータトルク定数 $[Nm/A]$
- K_E : モータ逆起電力定数 $[V/rpm]$
- V_b : モータブラシによる電圧降下

5.1.4 DC モータの伝達関数

この結果を基に DC モータの伝達関数を求めてみる．ブラシの電圧降下を無視すれば次のような式が求められる．これは入力電圧 $v(t)$ に対して， L_a, R_a, C_J の各要素による電気回路の電圧平衡に関する方程式である．

また, $e(t)$ はモータの逆起電力, $\omega(t)$ はモータの角速度である.

$$v(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a(t) + \frac{1}{C_J} \int_0^t i_a dt \quad (5.14)$$

$$e(t) = \frac{K_T K_E}{J} \int_0^t i_a dt \quad (5.15)$$

$$\omega(t) = \frac{K_T}{J} \int_0^t i_a dt \quad (5.16)$$

これより, 入力を印加電圧 $v(t)$, 出力を回転角速度 $\omega(t)$ とすると伝達関数は次のようになる.

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K_T / Js}{sL_a + R_a + K_T K_E / Js} = \frac{K_T}{s^2 J L_a + s J R_a + K_T K_E} \quad (5.17)$$

これは電氣的時定数 τ_E が機械的時定数 τ_M に比べ十分に小さい時, 次式のように近似できる.

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\tau_E)K_E(1 + s\tau_M)} \quad (5.18)$$

で表わすことができる. 式 (5.18) は, 電氣的時定数による一次遅れ回路, $1/K_E$ による電圧と角速度の変換, そして機械的時定数の一次遅れ回路の 3 つの要素が直列に接続された回路と考えることができる.

ここで電氣的時定数 τ_E とは式 (5.19) で表わされる値である. その意味は, 巻き線に電流を流すとトルクが発生するが, インダクタンスは電流の急激な変化を妨げる特性があり, 電気抵抗とインダクタンスで決まる一定の時間, 電流が流れにくい領域が存在する. この時間を電氣的時定数で表わす. ちなみに小型 DC モータでは $\tau_E : 0.1ms \sim 1ms$ 程度である.

$$\tau_E = \frac{L_a}{R_a} \quad (5.19)$$

また機械的時定数 τ_M は, 式 (5.20) で表わされる値である. モータのローターにステップ状のトルクが加わった場合に, ローターの回転はなだらかに加速し, 最終速度の 63% に達する時間をもって, 機械的時定数とする. ちょうど電気回路でコンデンサに抵抗を通して電圧を加えた場合のコンデンサの電圧変化と同様の CR 曲線となる. ちなみに小型 DC モータでは $\tau_M : 1ms \sim 10ms$ 程度である. 通常は, モータ軸には負荷を取付けるのが普通であるからこの値はより大きくなり, τ_E は事実上無視できる場合が多い.

$$\tau_M = \frac{J R_a}{K_T K_E} \quad (5.20)$$

K_T と K_E は同じ値となる？

教科書ではこの両者の値は同じとあるが，どうも納得がいかない．このため試しに実際に確認してみるとした．ある DC サーボモータ特性例をみると

- トルク定数 K_T : 0.0534[Nm/A]
- 逆起電力定数 K_E : 5.6[mV/rpm]

となっている．ここで回転角速度 ω は，[rad/s] の単位に合わせる必要があるので，[rpm] から変換する．すなわち [V/rpm] を [Vs/rad] に変更すれば両者は同じ値になるはずである．この変換は，

$$1[V/rpm] = 9.55[Vs/rad] \quad (5.21)$$

を用いる．これを用いて計算してみると逆起電力定数 5.6[mV/rpm] は， $0.0056 \times 9.55 = 0.05348$ となり，トルク定数と同じ値になる．トルク定数と逆起電力定数は単位が違うのに同じ値になるのは大変面白い．それとも同じ単位からなのだろうか？，残念ながらそこまでは追及していない．一方はローレンツ力，もう一方は電磁誘導，電子の動きと，磁界の関係であることは同じなので近い関係であることには間違いなだろう．両者の値が一致するのは，トルク定数および逆起電力定数は，モータのコイルの寸法と磁束の関係などから導かれ，その結果，同一のモータではこのパラメータが同じになることに由来するらしい．

また，maxson DC モータでは逆起電力定数ではなく，その逆数の回転数定数 [rpm/V] となっていた．そこである maxson モータの，トルク定数：16.3[mNm/A]，回転数定数：585[rpm/V] を計算してみると， $(1/585) \times 9.55 = 0.01632$ となり，合致した．

やはり， K_T と K_E は同じ数値となるようである．

5.2 DC モータに負荷慣性等が接続した場合の等価回路

次に DC モータが慣性体を駆動する場合の解析を行う．例として，モーターによって回転体を駆動するモデルを取り上げる．モータと回転体はシャフトで接続され，回転体は固定系との間に粘性抵抗があるとする．シャフトのねじれ剛性を K_s ，負荷の慣性モーメントを J_L ，粘性抵抗を D_L とする．

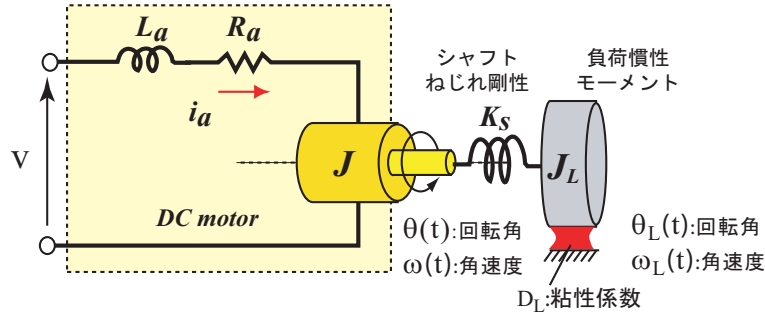


図 5.5: DC モータによる負荷回転体の駆動

図 5.5 左側点線で囲った部分はモータ側を示す．モータからの回転は，シャフトを通して回転体に伝わる．しかし，

1. シャフトのねじれ剛性のためシャフトがねじれる
2. シャフトのねじれにより，モータの回転角度 θ と回転体の回転角度 θ_L とがずれる．
3. よって，モータ側の角速度 ω と負荷側の角速度 ω_L が一致しない．
4. また，モータの発生するトルクは，モータのロータ (J) を駆動するためと，負荷側を駆動するために使われる．

この負荷側を駆動するためのトルクを T_L とすると， T_L はねじれ量にシャフト剛性を掛けたものであり，ねじれ角度は角速度の積分であるから，以下のような関係がある．

$$T_L = K_s(\theta - \theta_L) = K_s \int_0^t (\omega - \omega_L) dt \quad (5.22)$$

この機械－電気システムの等価回路は図 5.6 に示すようになる．ねじれ剛性のシャフト K_s はコイル L_s で，負荷慣性体 J_L はコンデンサ C_L で，粘性抵抗 D_L は抵抗 R_D となり，それぞれを電気回路素子で置き換える．また，回転機械系－電気系では，角速度－電圧，回転トルク－電流の対応関係となる．

$$K_s \Rightarrow L_s, \quad J_L \Rightarrow C_L, \quad D_L \Rightarrow R_D$$

$$\omega \Leftrightarrow V, \quad T \Leftrightarrow i$$

図の等価回路ではモータで発生したトルクは，モータのロータを回転するトルクと負荷を駆動するトルクに分かれる．

等価回路では，トルクは等価量として電流であるから，モータに流れる全電流を i_a とし，負荷を駆動するための電流を i_L とすると，モータのロータ (J) を駆動するための電流は $(i_a - i_L)$ となる．すでに節 5.1.2 で述

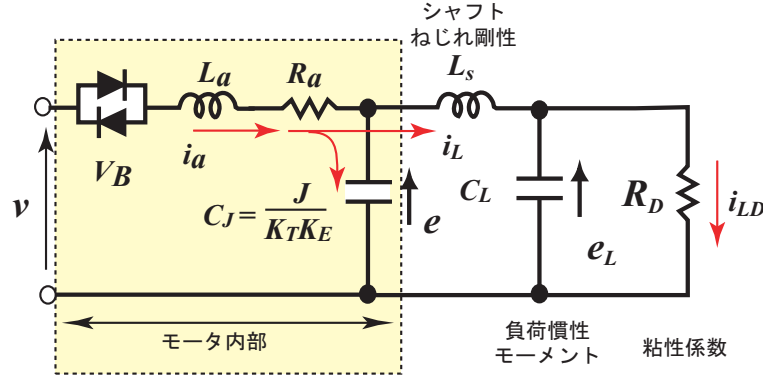


図 5.6: DC モータに負荷慣性が接続した場合の等価回路

べたことだが、このモータの機械-電気システムでは、モータの定数である K_T は、電気回路の電流と機械系のトルクの変換係数を表し、同じく K_E は、電気回路の電圧と機械系の角速度の変換係数を表す。

よって、モータの回転角速度 ω 、負荷側の回転角速度 ω_L 、そしてモータの発生トルク T_L の値は、図 5.6 の機械-電気回路系モデルの中で、対応する電圧、電流との関係は、次のようになる。

$$e = K_E \omega \quad (5.23)$$

$$e_L = K_E \omega_L \quad (5.24)$$

$$T_L = K_T i_L \quad (5.25)$$

5.2.1 シャフトのねじり剛性の等価変換

さて、ここでシャフトのねじり剛性 K_s を電気回路の L_s へ等価変換する。ここで式 (5.22) の両辺を時間微分し、次に上式の関係を用いて角速度 ω を電圧 e に変換すると以下のような式が得られる。

$$\frac{dT_L}{dt} = K_s (\omega - \omega_L) \quad (5.26)$$

$$\frac{dT_L}{dt} = K_s \frac{1}{K_E} (e - e_L) \quad (5.27)$$

また、シャフトを伝わるトルクと等価回路でのコイルに流れる電流の関係は以下ようになる。

$$T_L = K_T i_L \quad (5.28)$$

この両辺を時間微分すると次のようになる。

$$\frac{dT_L}{dt} = K_T \frac{di_L}{dt} \quad (5.29)$$

また、図 5.7 は等価回路のシャフト部分を描いたものである。このシャフトに相当するコイル L_s に流れる電流 i_L と電圧差 $e - e_L$ の関係から次式が求められる。

$$(e - e_L) = L_s \frac{di_L}{dt} \quad (5.30)$$

これらのトルクと電圧差の関係、および電気回路とした時のコイルに流れる電流と電位差の関係からインダク

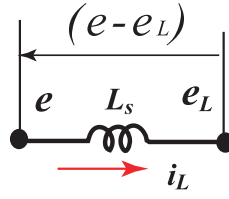


図 5.7: シャフト剛性の等価回路

タンス L_s は次のような式となる .

$$(e - e_L) = \frac{K_T K_E}{K_s} \frac{i_L}{dt} \quad (5.31)$$

$$L_s = \frac{K_T K_E}{K_s} \quad (5.32)$$

これはシャフト剛性 K_s に相当する等価インダクタンスが式 (5.32) となることを示す .

5.2.2 粘性負荷の等価変換

次に , 粘性負荷 D_L を電気回路の R_D へ等価変換する . まず , 式 (5.33) に示すように粘性 D_L による負荷トルク T_{DL} が負荷の角速度に比例するとする . また , T_{DL} は等価回路に流れる電流 i_{LD} とすると式 (5.34) となる .

$$T_{LD} = D_L \omega_L \quad (5.33)$$

$$T_{LD} = K_T i_{LD} \quad (5.34)$$

ここで T_{LD} は粘性負荷トルク , D_L は粘性係数 , i_{LD} は粘性負荷に流れる電流をそれぞれ表す .

すると , 式 (5.33) と式 (5.34) から ω_L を求め , これを式 (5.35) に代入すると , 式 (5.36) の関係が求まる .

$$e_L = K_E \omega_L \quad (5.35)$$

$$e_L = \frac{K_E K_T}{D_L} i_{LD} \quad (5.36)$$

ここで , 図 5.6 の抵抗 R_D に流れる電流 i_{LD} の関係から次式が成り立つ .

$$e_L = R_D i_{LD} \quad (5.37)$$

よって式 (5.36) の関係から抵抗 R_D に相当する等価抵抗は式 (5.37) となる .

5.3 フィードバック追従制御演習 1

問 1. 図 5.8 のような DC モータで慣性体を駆動するシステムがある。その振動挙動を求めたい。機械回路に変換し、電気回路シミュレータを用いて、その振動挙動を求めよ。

モータのパラメータは次の値を用いる。

逆起電力定数 $K_E = 0.02Vs/rad$, $K_T = 0.02Nm/A$, モータ慣性負荷 $J_m = 1.0 \times 10^{-6}kgm^2$, 電機子巻線抵抗 $R_a = 8.4\Omega$, 電機子インダクタンス $L_a = 5mH$ 。(整流ブラシによる電圧降下は無視する)

モータに取り付ける負荷のパラメータを次のようにする。

負荷慣性モーメント $J_{L1} = 1.0 \times 10^{-6}kgm^2$, $J_{L2} = 1.0 \times 10^{-6}kgm^2$, シャフトねじれ剛性 $K_{s1} = 1.0 \times 10^{-2}Nm/rad$, $K_{s2} = 1.0 \times 10^{-2}Nm/rad$, 粘性制動係数 $D_L = 1.0 \times 10^{-5}Nm/rad$

- (1) モータへの電圧として下図に示す方形波を入力したときのモータ出力軸, 各慣性体軸の角速度を求めよ。(回路シミュレータの出力結果を示すだけでよい) また電気回路シミュレータでは, 角速度は電圧となる。これを実際の角速度に変換する係数はいくらか。
- (2) 上記入力の場合の, モータを駆動電流, 各軸に伝わる回転トルクを求めよ(上記と同じ) また電気回路シミュレータでは, トルクは電流となる。これを実際のトルクに変換する係数はいくらか。
- (3) シャフトねじれ剛性 K_{s2} を固くすると挙動はどうなるか? (K_{s2} を 5, 10, 20 倍等にして確認)
- (4) 粘性制動係数 D_L を変化させた時の挙動はどうなるか? (D_L を 0.01, 0.1, 10, 20 倍等にして確認)

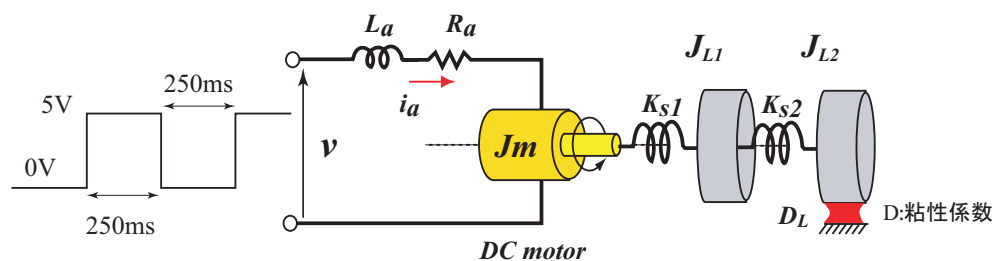


図 5.8: フィードバック追従制御演習 1

5.4 フィードバック追従制御演習 2

次はフィードバック追従制御の演習問題である。図 5.9 のシステムは、シンクロトランスを使用した機械電気制御回路である。目的は左側のハンドルを回転するとサーボモータの動力によって右側のレーダアンテナなど慣性系機構をハンドルに追従して回転させる。原理としては、A, B 2 つのシンクロトランスの回転角誤差 $\theta_i - \theta_0$ の差に比例した電圧 e_0 が増幅され、それに比例したサーボモータのトルク $\tau = k(\theta_i - \theta_0)$ が生ずる。サーボモータの回転は減速機(慣性 J_2)で減速され、さらにねじれ剛性シャフト c を経て、外部減衰 a と慣性モーメント J_2 の負荷を駆動する。従って入力回転角 θ_i より出力回転角 θ_0 が遅れていればサーボモータにより追いかけて行く。これは上記 5.3 節の演習問題と同様に モータ負荷に J_1, J_2, c, a が加わり、 J_2 の回転角度と指令入力角度の誤差がモータ駆動電圧入力となっている。即ち、フィードバック系が組み込まれている点が

異なる．出題者（私）はまだ，本制御系が回路シミュレータで解析できるかは確認していませんが，興味をもたれた皆さんは，各パラメータの値を適当に選び，ステップ入力に対する出力角度，正弦波入力に対する応答を各自シミュレータを用いて求めてください．（とりあえずモータに加える電圧を $K e_0$ とすれば良いだろう．）

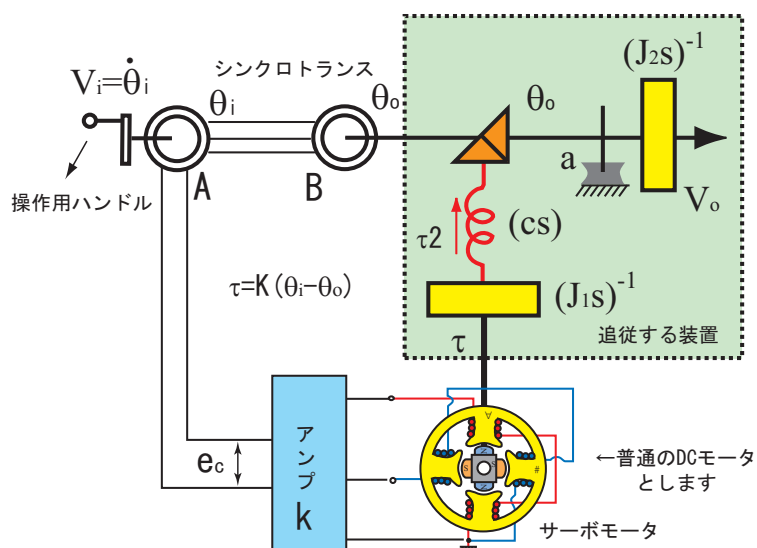


図 5.9: フィードバック追従制御演習 1

第 6 章

アナログコンピュータ

コンピュータといえば、皆さんはデジタル方式のコンピュータ以外にはあまりなじみがないであろう。ここでは、アナログ回路を利用した数値演算を行う計算機について話をする。常微分方程式などは解法には非常に役立つ。

アナログ回路を用いた計算機の良い点は、計算が実時間（実際にはオペアンプのゲイン帯域幅で制限される）で行われるため非常に高速である点である。この特性を使うとデジタルコンピュータにはやや難しい積分の計算なども簡単にできる。積分はコンデンサを使って電流（時間の関数としての電荷）を積分した電圧に変換することで計算する。具体的には、演算増幅器（オペアンプ）と抵抗、コンデンサを組み合わせた回路で実現できる。これは電子回路の教科書の演算増幅器の項には必ず出ている回路である。

ここでは例として、2 階の常微分方程式をアナログ回路で解いてみる。ただし実際のアナログ回路を組むことは大変なので、今回用いた電子回路シミュレータを用いてこのアナログ演算を行うことにする。

6.1 2 階の常微分方程式をアナログコンピュータで解く

次に示す 2 階の常微分方程式は質量、バネ、だんば系でお馴染みのものであると思う。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f \quad (6.1)$$

これをアナログコンピュータで解くことを行ってみる。まずはじめに、上式を移項して次のように書き直す。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} \left\{ f - c \frac{dx}{dt} - kx \right\} \quad (6.2)$$

この式の意味するところは、変数 x の 2 次微分 ($d^2 x/dt^2$) は式 (6.2) のように、1 次微分 (dx/dt)、と変数 x 、および外力 f の加減算で表わせることを示す。

ここで積分器の登場である。積分器に 2 次微分の値 ($d^2 x/dt^2$) を入力すると、1 次微分の値 (dx/dt) が得られ、同様にもう一度積分器を通すと変数 x が得られる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \text{積分器} \Rightarrow \frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{積分器} \Rightarrow x$$

すなわち積分器を通るごとに、1 次微分 (dx/dt)、変数 x が得られる。すると図 6.1 に示すように、積分器を 2 個用いて、それらからの出力を、 c, k 倍して、加算回路でその和を取って $1/m$ 倍して、最初の積分器へ、2 次微分の値 ($d^2 x/dt^2$) として入力とすればよい。このようにすることで、式 (6.1) の解がアナログ回路の出力として求まることになる。

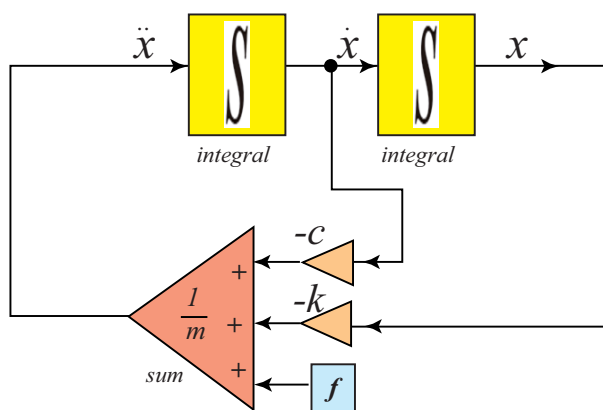


図 6.1: 2 階の常微分方程式を解くアナログコンピュータ

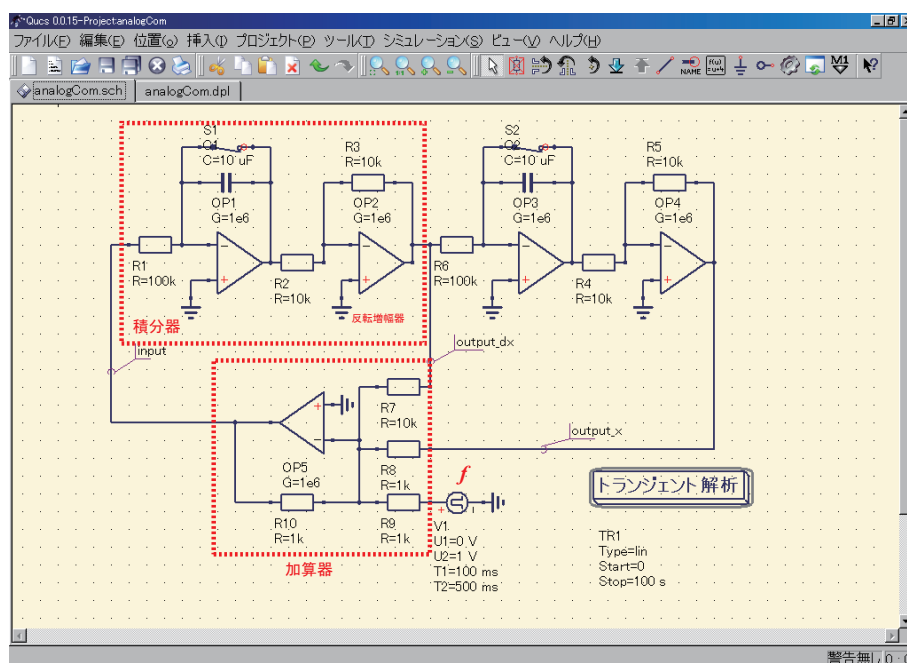


図 6.2: 2 階の常微分方程式を解くアナログコンピュータ回路例

6.2 アナログコンピュータ回路

図 6.2 に式 (6.1) を解くための回路を示す．2 つの積分器と，1 つの加算回路とから構成されている．

積分器はオペアンプと抵抗，コンデンサを組み合わせで構成した．ここでコンデンサと並列に接続してあるものはスイッチ素子である．これは積分器の教科書には書いてない．なんのために必要かと言うと，積分変数の初期値”0”を与えるためである．このスイッチ素子は初期状態では ON であるが，シミュレーション開始とともに off となる用に設定した．(例では，根拠はあまりないが 1ms 後と設定した)．スイッチ素子が ON の状態では，コンデンサーにたまる電荷は”0”であるので積分器の初期電圧も”0”となることによる．この積分定数は，本来ならば自由に設定可能とするのが実用上重要であるが，今回行っていない．但し，それほど難しいと

は思えないので皆さんへのアドバンスな課題としておく．また積分器の出力には反転増幅器を配置した．これは図 6.2 の積分器では，反転出力となり，OP2 の反転増幅器で再度反転させて通常出力とするためである．非反転増幅器を用いて積分器を作ることも可能かもしれないが今回は行わない．また，積分器の入力抵抗値，およびコンデンサの値は適当な値とした．(例では時定数 $CR = 1$ とした) この値を変更することで，見掛け上積分器のゲインが変化することになる．

また加算器はオペアンプ一台で構成した．この加算器回路も反転出力である点に注意する．加算器入力 (dx/dt)，変数 x はマイナスとして加算出力される．これは式 (6.2) から明らかなように好都合である．但し， f としてインパルス電圧を入れているが，その極性に注意すべきであろう．この例では，マイナス方向の f となる．また， m, c, k などのパラメータによって決まる定数倍の値は，オペアンプ (OP5) の "フィードバックゲイン抵抗/入力抵抗" で定めた．例えば c/m は今回 "1/10" としたため，実際の回路では $R_5/R_3 = 1000/10000$ としてある．

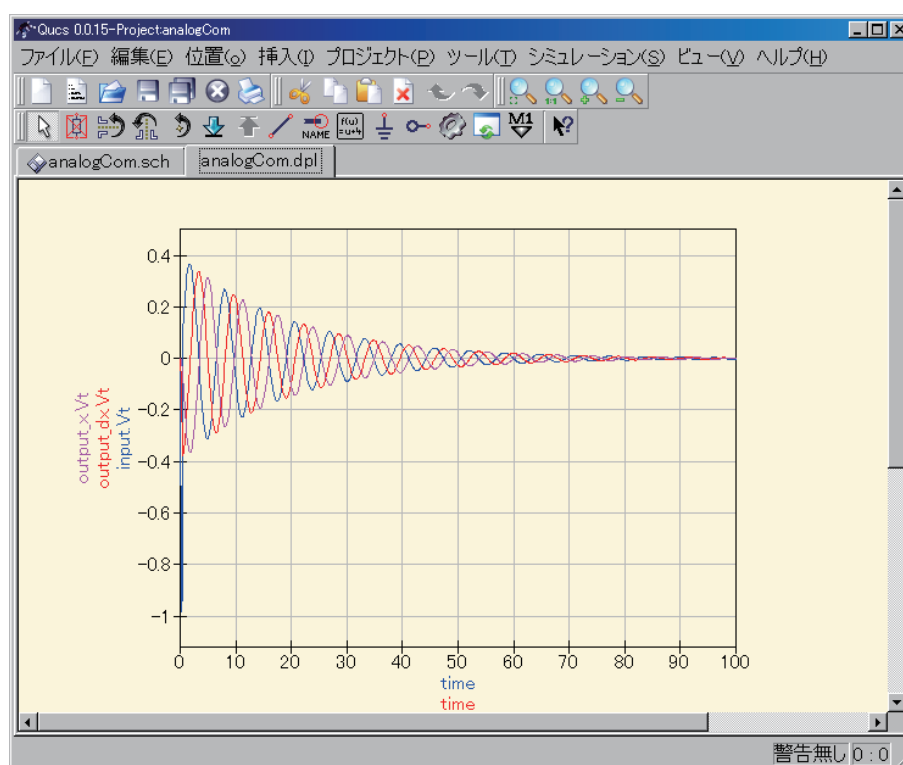


図 6.3: 2 階の常微分方程式を解くアナログコンピュータ回路例

図 6.3 には，シミュレーション結果を示す．減衰振動をしている様子が観測される．シミュレーションでは，入力としてインパルス波形 (100ms 後に 10ms 幅) とし $c/m = 0.1, k/m = 1$ としている．このパラメータを変化させるにはオペアンプのフィードバックゲイン抵抗，もしくは入力抵抗を変えればよい．

計算可能な物理プロセスはアナログコンピュータに翻訳可能であるとする説がある．ただしアナログコンピュータではダイナミックレンジの問題があり，その精度とうには限界があると思われる．

問題：試したことはないのですが，次の非線形方程式 (ファン・デル・ポール方程式) をアナログコンピュー

タで解くことは可能か？興味がある方はアナログ回路シミュレータで解いてみてください．式の中の非線形項である x^2 がアナログ回路で実現できればよいのですが．

QUCUS のコマンドで，`tool Component Library Ideal Mul` で掛算器があるのでこれを使えば可能でしょうが．係数 ϵ の値により，軌道の変化やアトラクター（リミットサイクル）の存在を確認することができるはずであると思う．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

以上

第II部

機械回路のマトリクス解析

第 7 章

伝達マトリクス

はじめに

前章では、機械系と電気系のアナロジーを用いて、機械システムを電気回路に置き換へ電子回路シミュレータを用いて機械システムのシミュレーションを行った。この場合のアナロジーとして、機械系の ” 速度と力 ” を、電気系の ” 電圧と電流 ” に対応させたモビリティ法について説明した。しかし、機械系の技術者が取り扱う量として、速度よりも変位が一般的である。そこで本章では、機械系の ” 変位と力 ” の関係を記述する伝達マトリクスについて説明する。この伝達マトリクスは、電気回路の入力端子一対と出力端子一対の 2 ポート回路 (4 端子回路ともいう) の解析に相当するものである。

7.1 伝達マトリクスについて

ここでは新たに伝達マトリクスについて説明する。まず、バネ、ダンパ、質量の各要素について伝達マトリクスを記述する。図 7.1 は、入力が ” 変位と力 ” の 2 入力、出力が ” 変位と力 ” の 2 出力をあらわすブラックボックスである。この機構の入力端の変位を x_1 , 出力端の変位を x_2 , また入力端の力を f_1 , 出力端の力を f_2 とする。この入出力端子間の関係は式 7.42 のマトリクス形式で表現できる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

このマトリクスを伝達マトリクスとよび Γ と表す。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

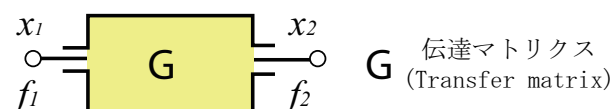


図 7.1: 伝達マトリクスの定義

” 変位・力系 ” モビリティ (λ_x)

ここで ” 変位の差と力 ” の関係を, モビリティとの類似から, 変位と力の関係式 $\Delta x = \lambda_x f$ となる λ_x を変位・力系のモビリティと定義する .

” 変位・力系 ” モビリティの定義

” 速度・力系 ” \Rightarrow ” 変位・力系 ” へ

$$\text{変位・力系: } x_1 - x_2 = \Delta x = \lambda_x f \quad \parallel \quad \text{速度・力系: } v_1 - v_2 = \Delta v = \lambda_v f$$

ここでは両者を区別するため, 変位・力系では λ_x を用い, 従来の速度・力系の λ_v と記号表記を変えることにする .

電気回路のアナロジーとして機械回路を解析するモビリティ法では, 要素の入力端, 出力端の速度差 Δv をその要素を通る力 $f (f_1 = f_2)$ で除したものと定義した . モビリティ法で速度を用い定義した理由は, 電気回路の電圧と電流に対応させるためのものであった . このモビリティ法では $f_1 = f_2$ という制限があった . これは要素を流れる流通量 (電流など) の連続性から要請される . しかし, ここで解説している伝達マトリクス法によれば, $f_1 \neq f_2$ でよく, モビリティ法より自由度が高い . また本来, 機械回路では, 速度より変位の方が身近に感じられるため, より自然な考え方で機械回路が解析できるメリットがある .

- 速度・力系のモビリティ法: $f_1 = f_2$ である必要がある
- 変位・力系の伝達マトリクス法: $f_1 \neq f_2$ でもよい

7.2 基本要素の伝達マトリクス

7.2.1 ばねの伝達マトリクス

図 7.2 は, コンプライアンス c のバネの要素を示す . この入出力端子間の関係は以下のようになる .

$$x_1 - x_2 = c f_1 \tag{7.3}$$

$$f_1 = f_2 \tag{7.4}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

その伝達マトリクスは

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

7.2.2 ダンパの伝達マトリクス

直列ダンパ要素

図 7.2 は、直列ダンパ要素を示す。この入出力端子間の関係は以下ようになる

$$\frac{(x_1 - x_2)}{dt} = af_1 \equiv af_2 \Rightarrow x_1 = x_2 + \frac{a}{s}f_2 \quad (7.7)$$

$$f_1 = f_2 \quad (7.8)$$

となる。これを整理してマトリクス形式とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

その伝達マトリクスは

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

並列ダンパ要素

同様に図 7.2 には、並列ダンパ要素を示す。この入出力端子間の関係は以下ようになる。

$$x_1 = x_2 \quad (7.11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a(f_1 - f_2) \Rightarrow f_1 = \frac{a}{s}x_2 + f_2 \quad (7.12)$$

となる。これを整理してマトリクス形式とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{a}{s}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

その伝達マトリクスは

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{a}{s}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

7.2.3 質量の伝達マトリクス

図 7.2 は、質量要素を示す。この入出力端子間の関係は以下ようになる。

$$x_1 = x_2 \quad (7.15)$$

$$f_1 = m \frac{d^2x_2}{dt^2} + f_2 \Rightarrow f_1 = s^2m + f_2 \quad (7.16)$$

となる。これを整理してマトリクス形式とすると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

その伝達マトリクスは

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

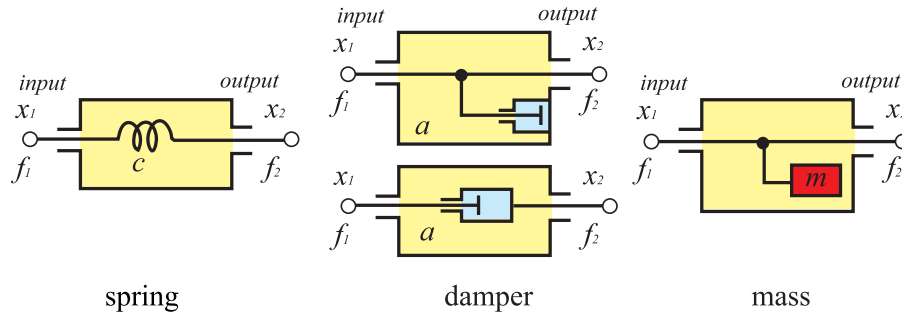


図 7.2: 各要素の伝達マトリクス

7.3 要素の直列および並列配置の伝達マトリクス

伝達マトリクスの基本要素例については既に見した。これらバネ、ダンパー等の各個別要素の配置として、図 7.3 のように直列配置と並列配置がある。ダンパーに関しては例に見したとおりである。

さて、図 7.3 をみると、要素が直列に入る場合は、力が要素を通過して連続となるから $f_1 = f_2$ であり、

$$x_1 - x_2 = \lambda_x f_1 \Rightarrow x_1 = x_2 + \lambda_x f_2 \quad (7.19)$$

$$f_1 = f_2 \quad (7.20)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

となる。また、要素が並列に入る場合は、変位が同一となるから $x_1 = x_2$ となり、

$$x_1 = x_2 \quad (7.22)$$

$$x_1 = \lambda_x (f_1 - f_2) \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\lambda_x} x_2 + f_2 \quad (7.23)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

となる。

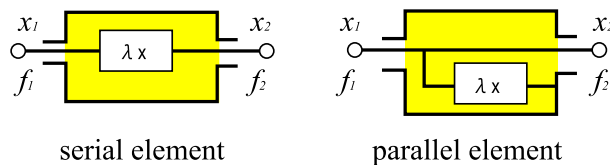


図 7.3: 伝達マトリクスの定義

これからわかるように

1. 単独要素が直列に含まれる場合は伝達マトリクスの右上として現れる
2. 並列に含まれる場合は左下に逆数として現れる

ことがわかる。

7.4 伝達マトリクスの直列接続

図 7.4 のようにばねとダンパが接続された伝達マトリクスを求めてみる .

バネに関しては : $x_1 - x_2 = cf_1$

ダンパに関しては : $\frac{dx_2}{dt} = a(f_1 - f_2) \Rightarrow x_2 = \frac{a}{s}(f_1 - f_2)$

となる . 以上より ,

$$x_1 = x_2 + cf_1 = x_2 + c\left(\frac{s}{a}x_2 + f_2\right) = \left(1 + \frac{c}{a}s\right)x_2 + cf_2 \quad (7.25)$$

$$f_1 = \frac{s}{a}x_2 + f_2 \quad (7.26)$$

これより次のようなマトリクス表現で記述できる .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

その伝達マトリクスは次のように表される .

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

これは , スプリング単独のエLEMENT式 7.6 とダンパ単独の並列ELEMENT式 7.14 の積として表現できる .

$$\Gamma = \Gamma_{spring} \cdot \Gamma_{damper} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

このように入出力端の変位と力を結合して伝達マトリクスを作るには各要素の伝達マトリクスを順次掛け合わせて合成伝達マトリクスを求めればよい .

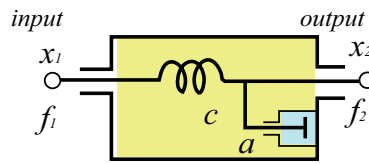


図 7.4: ばねとダンパの合成伝達マトリクス例

7.4.1 接続のマトリクス表示例

モビリティの直列接続をした場合の合成伝達マトリクスについて示す .

(1) 直列接続のマトリクス表示例

伝達マトリクスを図 7.5 のように直列接続した場合の伝達マトリクスは次のようになる .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

図のように直列に接続すると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{xi} \quad (7.31)$$

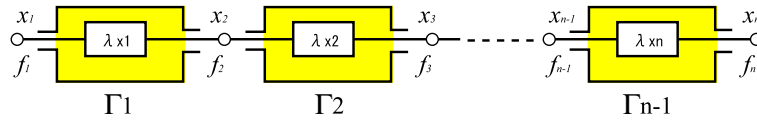


図 7.5: 直列接続の伝達マトリクスの定義

(2) 並列要素の直列接続のマトリクス表示例

並列伝達マトリクスを図 7.6 のように接続した場合の伝達マトリクスは次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

図のように並列に接続すると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{xi}^{-1} \quad (7.33)$$

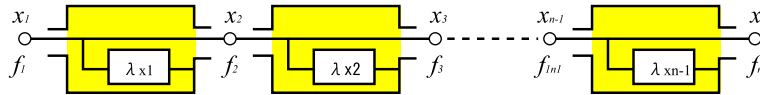


図 7.6: 直列接続の伝達マトリクスの定義

伝達マトリクスの並列接続について

伝達マトリクスは入力と出力を直列に順次接続する場合は，各伝達マトリクスを掛け合わせていくことで計算できる．しかし，並列に接続する場合は取り扱いが非常に難しくなる．そのような場合には後述のマトリクス解析を用いる．

7.5 変位・力系と速度・力系の伝達マトリクス相互変換

電気回路のアナロジーとして機械回路を解析するモビリティ法では，“速度差”とその要素を通る“力”で定義した．本章では“変位差”とその要素を通る“力”で定義している．これは機械回路では，速度より変位の方が身近に感じられるため，より自然な考え方で機械回路が解析できるメリットがあるためである．ここで変位・力系 Γ_x と速度・力系 Γ_v の相互変換について考えてみる．

変位と速度は，相互に時間微分と積分の関係で結ばれるため両者の間の相互変換は可能である．そこで変位・

力の伝達マトリクスは速度・力の伝達マトリクスへの相互変換が可能であることを示す．まず変位と速度の相互変換マトリクスは以下のように記述できる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_x \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_v \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

ここで式 7.34 で、速度・力系の左式を変位・力系の伝達マトリクス $= \Gamma_x$ で記述することを試みる．まず速度は変位の時間微分であるから式 7.35 となる．次に変位は速度の時間積分であるから式 7.36 となる．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int dt & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

よって、式 7.34 の速度・力系の式に、式 7.35 と式 7.36 を合わせると以下の式となる．これは、 Γ_v が $= \Gamma_x$ によって記述できることを示している．

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D \Gamma_x \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = D \Gamma_x D^{-1} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

また図 7.7 に示すような変化によって相互変換が可能となる．

$$\Gamma_v = D \Gamma_x D^{-1} \quad (7.38)$$

$$\Gamma_x = D^{-1} \Gamma_v D \quad (7.39)$$

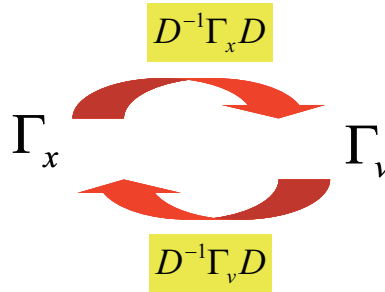


図 7.7: 変位・力系と速度・力系の伝達マトリクス相互変換

7.6 電気回路の定理を機械回路系へ応用する

ここでは例として、電気回路学での有名な Maxwell の相反定理と Thevenin(テブナン) の定理に対応する機械回路系での例について示す．

7.6.1 Maxwell の相反定理 (reciprocal theorem)

電気回路での Maxwell の相反定理とは、回路網内部に電源等を含まない受動回路であり、受動素子が電圧の極性や電流の向きに関係することなく特性の変わらない両方向性ある場合、回路に N 対の端子対があり、その時そこに加える電圧電流を $(V_1, V_2, \dots, V_N), (I_1, I_2, \dots, I_N)$ 、および加える電圧電流を変化させたときの $(V'_1, V'_2, \dots, V'_N), (I'_1, I'_2, \dots, I'_N)$ とすると以下の関係がある．

$$\sum_{i=1}^N V_i I'_i = \sum_{i=1}^N V'_i I_i \quad (7.40)$$

また，このような回路の場合，インピーダンスマトリクス Z は $Z = Z^T$ で対称性がある．ここで T は転置行列を表す．またアドミッタンスマトリクス Y は，インピーダンスマトリクス Z の逆数であり，その積は単位行列になる $ZY = I$ ．

図 7.8 には 2 端子回路の例を示す．図のように端子 2-2' を短絡した $V_2 = 0$ のときと，端子 1-1' を短絡した $V_1 = 0$ 時とにてきようすると，以下の関係が成り立つ．ここで特に $V_1 = V'_2$ で端子 11'，22' からの入力電圧がともに等しい場合，短絡した閉路に流れる電流 I_2, I'_1 は等しくなる．

$$V_1 I'_1 = V'_2 I_2 \quad (7.41)$$

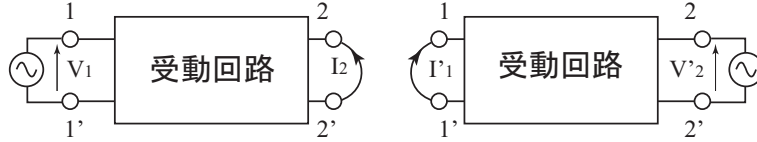


図 7.8: Maxwell の相反定理

さて，以上が電気回路での例であるが，これからは材料力学でおなじみの Maxwell の相反定理を伝達マトリクスを用いて証明する．図 7.9 に示すような両端ピン支持の弾性はりを考える．一般に弾性はりには集中荷重とたわみは比例し，線形方程式で表される．ここで弾性はり上に 2 点を考えると，2 点間の力 f と変位 x の関係は以下のような伝達マトリクスで表現できる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

ここで図 7.9(a) のように端子 1 に f_1 の力を加え，端子 2 には拘束を加えず自由にしてその変位を x_{2free} と

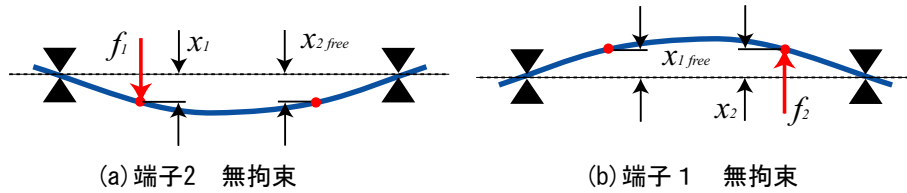


図 7.9: Maxwell の相反定理

する．即ち

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2free} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = C \cdot x_{2free} \quad (7.43)$$

次に上式の伝達マトリクスの逆行列を作ると以下ようになる．この時受動的機械回路ではエネルギーが回路内に存在しないため，その行列式 $\Delta = AD - BC$ は 1 となる．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

今度は図 7.9(b) のように端子 2 に f_2 の力を加え，端子 1 を自由にしてその変位を x_{1free} とする．即ち

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1free} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2 = -C \cdot x_{1free} \quad (7.45)$$

これより， $f_1 = f_2 \equiv f$ と同等の力を加えると

$$x_{1free} = -x_{2free}$$

となり，線形系の入力端に力 f を加えたときに出力端に生じる自由変位は，逆に出力端に同じ力 f を加えたときに入力端に生じる自由変位に等しくなる．但し方向は逆となる．これは機構が複雑であってもそれが線形ならば成立する．

同様なことは力についても成立つ．今度は端子 2 を固定し，端子 1 の変位を x_1 とするように力を加えたとする．即ち，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{2block} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = B \cdot f_{2block} \quad (7.46)$$

そして次には端子 1 を固定し，端子 2 の変位を x_2 とするように力を加えたとする．即ち，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{1block} \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -B \cdot f_{1block} \quad (7.47)$$

これより， $x_1 = x_2 \equiv x$ と同等の変位を加えると

$$f_{1block} = -f_{2block}$$

となり相反定理は，” 入力端に一定の変位を与えた場合，固定出力端に発生する力は，逆に出力端に同じ変位を与えた際に固定入力端に発生する力と等しくなる ”，という表現にもなる．

7.6.2 Thevenin(テブナン) の定理

テブナンの定理は電気回路を解析する場合には必要不可欠の定理として知られている．今回，機械回路を 4 端子回路として記述した場合，このテブナンの定理を用いて機械回路が解析できる．本節ではその例を示したい．まずテブナンの定理は，等価電圧源の定理とも呼ばれている．この定理の内容は，図 7.10(a) に示すよう

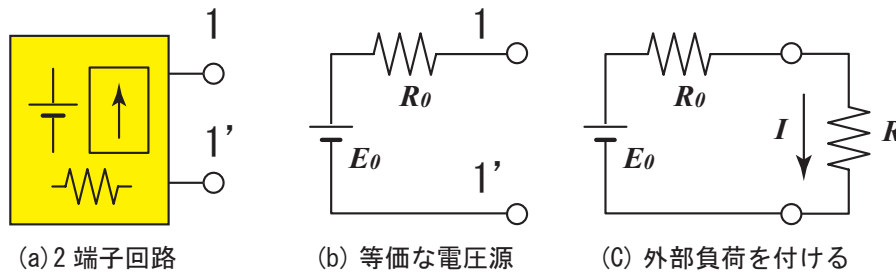


図 7.10: テブナンの定理

な内部に電圧源，電流源を含む，どんな複雑な回路（線形素子から構成）であっても，図 7.10(b) に示すように理想電圧源 e_0 と内部抵抗 R_0 の電圧源としてみなすことができること．また外部抵抗 R を接続したときに流れる電流 I は次のようになる．

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R} \quad (7.48)$$

Thevenin(テブナン)の定理の応用例

この定理を用いて機械回路を解析してみる．例として 7.11(a) に示すように両端ピン支持された梁の 1 点がコンプライアンス c のバネで支えられている．入力に f_1 を与えた場合の f_2 と x_{2free} を求めてみる．図 7.11(b) にはその機械回路モデルを示す．

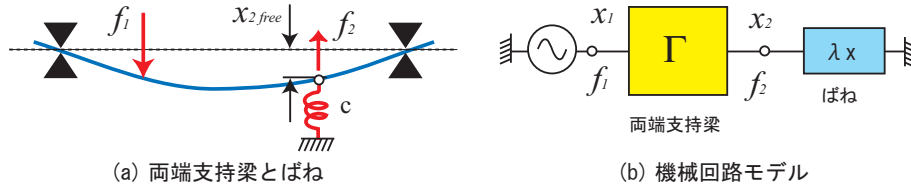


図 7.11: テブナンの定理を使った応用例

まず，この梁の伝達マトリクス Γ を式 7.52 に示す．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

ここでは機械回路は，電気回路と同様に取り扱うとする．この機械回路では場合， x_2, f_2 が電気回路の例で出力端子 1-1' に現れる電圧と電流に相当する．この場合，入力はこの機械回路 BlackBox に含まれるとする．出力端子 1-1' から見た，電気回路の内部状態を説明する過程

1. 端子 1 に力 f_1 を加え，端子 2 の変位 x_{2free} を求める．条件として端子 1 の変位は x_1 とし，端子 2 は拘束無しのを自由とする．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2free} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

これは力 f_1 を一定とし，電気回路の例での出力端子 1-1' を開放した場合に相当する．即ち開放したため出力端子 1-1' には電流が流れず 0 となる．この結果から次式が求まる．

$$f_1 = C x_{2free} \Rightarrow x_{2free} = f_1 / C \quad (7.51)$$

これは図 7.11(b) で端子 1-1' の開放電圧に相当する．

2. 端子 1 に力 f_1 を加え，端子 2 に発生する力 x_{2free} を求める．条件として端子 1 の変位は x_1 とし，端子 2 は動かないように拘束とする．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{2block} \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

この結果から次式が求まる．

$$x_1 = D f_{2block} \Rightarrow f_{2block} = f_1 / D \quad (7.53)$$

これは図 7.11(b) で端子 1-1' の短絡電流に相当する．

3. 機械回路での内部モビリティ λ_0 は次のようになる .

$$\lambda_0 = f_{2block}/x_{2free} = D/C \quad (7.54)$$

これは図 7.11(b) で電気回路の内部抵抗 R_0 に相当する .

4. 機械回路出力端 2 にコンプライアンス c のばねを入れることは , ばねのモビリティは , $\lambda = c$ であるからテブナンの定理により , そこに発生する力 f_2 , 電気回路の場合では流れる電流は , 次の式となる .

$$f_2 = \frac{x_{2free}}{\lambda_0 + \lambda} = \frac{x_{2free}}{D/C + c} = \frac{Cx_{2free}}{D + cC} = \frac{f_1}{D + cC} \quad (7.55)$$

これは図 7.11 の電気回路で , 外部抵抗 R を接続したときに流れる電流 I を求める式 7.48 に相当する .
C,D 要素は材料力学の簡単な問題であるから各自求めてもらいたい .

7.7 マトリクス解析法

これまでは入出力端子として x_1, x_2, f_1, f_2 の 2 ポート系について説明してきた . これからは機械回路中にある節点における力 f_i と変位 x_i における伝達マトリクスについて説明する . 機械回路中の点における力と変位は一般的には以下のように表記できる .

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{Z}\mathbf{x}$$

7.7.1 座標系の変換 (インピーダンスマトリクス)

通常 , 力 f_i と変位 x_i は , 座標系の取り方によって大きく変わる . そこで座標系を変更したときに , インピーダンスマトリクス \mathbf{Z} はどのようになるか , その変換式を以下に示す . f_i と x_i を現在の座標系における力と変位とする . 新たな座標系における力と変位を f'_i と x'_i とする . 新旧座標系間は座標変換マトリクス \mathbf{C} を用いて以下のように変換できるものとする .

$$\text{旧座標系 : } \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \quad (7.57)$$

$$\text{新座標系 : } \mathbf{x}' = (x'_1 \ x'_2 \ \cdots \ x'_m)^t \quad (7.58)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}' \quad (7.59)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

\mathbf{C} は座標変換マトリクスと呼ばれ , 回転マトリクスなどもこれに相当する . また新座標系における運動方程式が次のように定義され , \mathbf{Z}' は新座標におけるインピーダンスマトリクスになる .

$$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}'\mathbf{x}' \quad (7.61)$$

これから新旧座標系間の関係を求めてみる．まず全仕事量は，新旧の両座標系でも等しい．仕事は各点 (node) での力と変位の積であるから，力ベクトルと変位ベクトルの内積となる．新旧座標系で両者が等しいことから次式が成立する．

$$W = \mathbf{f}'^t \mathbf{x}' = \mathbf{f}^t \mathbf{x} \quad (7.62)$$

上式の \mathbf{x} を座標変換マトリクス \mathbf{C} を用いて \mathbf{x}' で表すと次のようになる．

$$W = \mathbf{f}'^t \mathbf{x}' = \mathbf{f}^t \mathbf{x} = \mathbf{f}^t \mathbf{C} \mathbf{x}' \quad (7.63)$$

この転置行列をとれば次式となる．

$$\mathbf{f}' = \mathbf{C}^t \mathbf{f} \quad (7.64)$$

また，旧インピーダンスマトリクス \mathbf{Z} と新インピーダンスマトリクス \mathbf{Z}' の変換は次のようになる．

$$\mathbf{f}' = \mathbf{C}^t \mathbf{f} = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{x} = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} \quad (7.65)$$

以上の関係を表 7.1 に示す．

表 7.1: 新旧座標系の関係 (インピーダンスマトリクス)

新座標系		旧座標系
	\mathbf{C}	
\mathbf{x}'	\Rightarrow	\mathbf{x}
$\mathbf{Z}' \Downarrow$		$\mathbf{Z} \Downarrow$
	\mathbf{C}^t	
$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}' \mathbf{x}'$	\Leftarrow	$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$
$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C}$		

表 7.2: 新旧座標系の関係 (モビリティマトリクス)

新座標系		旧座標系
	\mathbf{C}	
\mathbf{f}'	\Rightarrow	\mathbf{f}
$\lambda' \Downarrow$		$\lambda \Downarrow$
	\mathbf{C}^t	
$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}' \mathbf{x}'$	\Leftarrow	$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$
$\lambda' = \mathbf{C}^t \lambda \mathbf{C}$		

7.7.2 座標系の変換 (モビリティマトリクス)

インピーダンスマトリクス Z と同様なことが，その逆関係にあるモビリティマトリクス $x = \lambda f$ について成り立つ．同様に座標変換マトリクス C を用いて以下のように変換できるものとする．

$$\text{旧座標系 : } f = (f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n)^t \quad (7.66)$$

$$\text{新座標系 : } f' = (f'_1 \quad f'_2 \quad \cdots \quad f'_m)^t \quad (7.67)$$

$$f = Cf' \quad (7.68)$$

導出式はインピーダンスマトリクスと同様に行うと表 7.2 のようになる．また λ' は新座標におけるモビリティマトリクスになる．

第 8 章

伝達マトリクスによる解析

8.0.3 平行リンク機構

図 8.1 に示すようなリンク機構インピーダンスマトリクスを求める．この機構は機械回路 Z_a, Z_b が並列に接続されたものである．まず各要素間の入出力変位及び力を図に示すように定めると，各要素のインピーダンスマトリクスによって以下のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{a11} & z_{a12} \\ z_{a21} & z_{a22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_b \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{b11} & z_{b12} \\ z_{b21} & z_{b22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

これを入出力変数が 4 個とする一般インピーダンスマトリクスにまとめると次式のようになる．

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{a11} & z_{a12} & 0 & 0 \\ z_{a21} & z_{a22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{b11} & z_{b12} \\ 0 & 0 & z_{b21} & z_{b22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

そして以上の (x_1, x_2, x_3, x_4) を旧座標での表記と考え，図 8.1 の合成した系の入出力を (x_0, x_n) とし，旧座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) から新座標 (x_0, x_n) への座標変換の変換行列 \mathbf{C} を求める．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

この変換行列 \mathbf{C} と座標変換式 7.65 を用いて新座標でのインピーダンスマトリクスは次のように計算できる．

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b \quad (8.5)$$

従って図 8.1 の入出力は次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

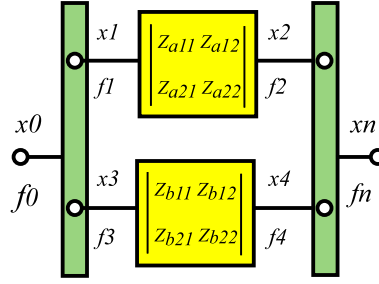


図 8.1: 並列接続の伝達マトリクス

8.0.4 多直列要素の振動フィルタ

振動フィルタを多段に直列接続した振動フィルタ特性を求めてみる．いま図に示すように一要素がバネと質量からなるとする．その要素の伝達マトリクスは表から次のように計算できる．

$$\Gamma = \Gamma_s \Gamma_m \Gamma_s = \begin{bmatrix} 1 & c/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{cms^2}{2} + 1 & \frac{c^2ms^2}{4} + c \\ m^2s & \frac{cms^2}{2} + 1 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

いま振動現象を扱うとして定常状態を考えれば $s = j\omega$ とすれば良いことから次式を得る．

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 & c \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \\ -m\omega^2 & 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \end{bmatrix}, \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{cm}} \quad (8.8)$$

この要素を $n - 1$ 個直列に接続すると全体の伝達方程式は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \Gamma^{n-1} \begin{bmatrix} x_n \\ f_n \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

ここで Γ^{n-1} の計算はまともに行うと大変な労力が必要だが，以下のような方法を用いることで簡略化ができる．式 (8.8) の行列は伝達マトリクスであるから各要素を A, B, C, D とすると，本行列は線形の変換素子のみからなる行列であるため，その行列式は $\Delta = AD - BC = 1$ となる．また， $A = D$ であることに着目して各パラメータを以下のようにおく．

$$A = \cosh\theta, B = \lambda_0 \sinh\theta, C = \sinh\theta/\lambda_0, D = \cosh\theta \quad (8.10)$$

この双曲関数の性質から

$$\Delta = AD - BC = \cosh^2\theta - \lambda_0 \sinh\theta \sinh\theta/\lambda_0 = 1 \quad (8.11)$$

となる．ここで式 (8.8) で次のようにする．

$$A = D = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \cosh\theta \quad (8.12)$$

$$B = c \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] = \lambda_0 \sinh\theta \quad (8.13)$$

$$C = -m\omega^2 = \sinh\theta/\lambda_0 \quad (8.14)$$

また λ_0 は次のようになる .

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} = c\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{cm}} \quad (8.15)$$

すなわち双曲パラメータ θ (hyperbolic parameter , これは一般に複素数 $\alpha + j\beta$ とすればよい) を利用すれば式 (8.8) は次のようになる .

$$\Gamma_\theta = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \lambda_0 \sinh\theta \\ \sinh\theta/\lambda_0 & \cosh\theta \end{bmatrix}, \quad \cosh\theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2, \quad \lambda_0 = c\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{cm}} \quad (8.16)$$

この双曲関数には次のような性質がある .

$$\Gamma_\theta^m = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \lambda_0 \sinh\theta \\ \sinh\theta/\lambda_0 & \cosh\theta \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \cosh m\theta & \lambda_0 \sinh m\theta \\ \sinh m\theta/\lambda_0 & \cosh m\theta \end{bmatrix} = \Gamma_{m\theta} \quad (8.17)$$

すなわち双曲パラメータ θ を用いて作ったマトリクスを m 乗した結果は , 各要素の θ の代わりに $m\theta$ をおけばよい .

ここで正弦波の入力変位 $x_1 = X_1 \exp j\omega$ に対する出力変位 $x_n = X_n \exp j\omega$ の振幅比 $|X_n|/|X_1|$ を求める . 出力端を自由端とすれば次式を得る .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(n-1)\theta & \lambda_0 \sinh(n-1)\theta \\ \sinh(n-1)\theta/\lambda_0 & \cosh(n-1)\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

これより

$$\frac{|X_n|}{|X_1|} = \frac{1}{\cosh(n-1)\theta} \quad (8.19)$$

ここに

$$\cosh\theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \quad (8.20)$$

式 (8.20) において θ が実数の範囲では $\omega = 0$ の場合しかあてはまらない . $\theta = \alpha + j\beta$ と仮定すると次のようになる .

$$\frac{|X_n|}{|X_1|} = \frac{1}{\cosh(n-1)\theta} = \frac{1}{\cosh(\alpha + j\beta)} = \frac{1}{\cosh\alpha \cos\beta + j \sinh\alpha \sin\beta} \quad (8.21)$$

式 (8.21) が実数であるためには α, β の種々の組合せから値を求めてゆく . ここでフィルタ要素を $(n-1)$ 個接続した場合は , $(n-1)\alpha, (n-1)\beta$ となりその時の組合せを求めることになる .

8.0.5 バイラテラル油圧サーボ機構

図 8.2 は操縦桿と水平舵の変位が静的に比例する比例制御を行い , かつ水平舵に作用する空気の反作用力を操縦桿にフィードバックして無理な操縦を行わないようなバイラテラル油圧サーボ機構を示す .

図 8.2 で操縦桿を x_1 の方向に引くと , 油圧制御弁のスプールが弁ポートを開き操作ピストン A_2 (ピストンの有効面積) を p の油圧で左側に引き , 水平舵を反時計回りに回転させる . その水平舵による x_2 の変位によってフィードバックレバーを通して制御弁を閉じるように働く . ここでもし x_1 が一定ならばそれに比例した x_2 の位置で舵は静止し , いわゆる比例制御が行われる . その際 , 操作ピストンに働く油圧 p が検力ピストンにも働き , 従って操縦桿にも水平舵に働く空気作用力 f_2 に比例した力 f_1 が伝えられる . これによって無理な操作を行わないようにして安全性を高めることになる .

いま制御弁のスプール変位を u , そのポート毎で制御される油流量を q とすれば , 操作ピストンに働く油圧は近似的に次式で与えられる .

$$p = au - bq \quad (\text{Table 45}) \quad (8.22)$$

上式の , スプールの中性点からの変位 u は , フィードバックレバーのてこ長さをそれぞれ , l_1, l_2 とすれば次式で表わされる .

$$u = mx_1 - n_2x_2, \quad m = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad n = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad (8.23)$$

また弁を通る流量 q は検力ピストン変位 $A_1/(dx_1/dt)$ と操作ピストン変位 $A_2/(dx_2/dt)$ とに分配されるから次の関係が得られる .

$$q = A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (8.24)$$

最後に操縦桿に作用する反力 f_1 と水平舵を駆動するピストン棒に働く空気力 f_2 は次式で与えられる .

$$f_1 = A_1 p \quad (8.25)$$

$$f_2 = A_2 p \quad (8.26)$$

以上を用いて $(x_1, x_2), (f_1, f_2)$ の関係を求めてみる . まず式 (8.26) から

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

式 (8.22) から

$$\begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

式 (8.23) と式 (8.24) から

$$\begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -n \\ A_1 s & A_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

以上が得られ , これらを接続すると次式が得られる .

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -n \\ A_1 s & A_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

式 (8.30) のマトリクス部分の乗算を計算すると次の式が得られる .

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(am - A_1bs) & -A_1(an + A_2bs) \\ A_2(am - A_1bs) & -A_2(an + A_2bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

式 (8.31) は力 f と変位 x のマトリクスを関係づける方程式であるので , 右辺の係数であるマトリクスを特にインピーダンスマトリクス Z とよぶ . これを伝達マトリクス Γ に変換するには表 8.1 の変換公式を用いて次のように表わせる .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_2(am - A_1bs)} \begin{bmatrix} A_2(an + A_2bs) & 1 \\ 0 & A_1(am - A_1bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

このとき注意したいことは , 受動回路では行列式 $|\Gamma| = 1$ であるが , 今回のような内部に油圧源のようなエネルギー源を含む場合行列式は $|\Gamma| \neq 1$ である .

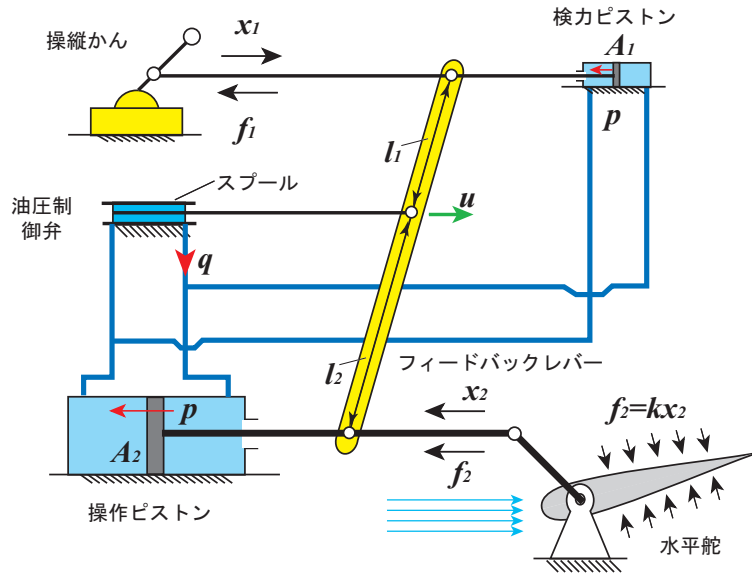


図 8.2: バイラテラル油圧サーボ

次に式 (8.33) を用いて簡単な実際の問題を解いてみる．図 8.2 である速度で航行する場合空気力により変位 x_2 ，言い換えれば舵角に比例した力 $f_2 = kx_2$ が作用するものとする．これを式 (8.33) に代入すると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_2(am - A_1bs)} \begin{bmatrix} A_2(an + A_2bs) & 1 \\ 0 & A_1(am - A_1bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ kx_2 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

これにより x_1 と x_2 の関係が次のような式で与えられる．

$$x_2 = \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) \frac{1 - T_2s}{1 + T_1s} x_1, \quad \text{ここで } T_1 = \frac{A_2b}{an + \frac{k}{A_2}}, \quad T_2 = \frac{A_1b}{am} \quad (8.34)$$

また力の関係は次式となる．

$$f_1 = \frac{A_1}{A_2} f_2 \quad (8.35)$$

即ち，操縦桿にフィードバックされる力は舵に働く力の A_1/A_2 に縮小され，操縦者はこの舵に働く力を感じ取ることができる．

一例として，このようなバイラテラルサーボ操縦桿を操作する時， x_1 を次のように時間とともに指数関数的に与えた時の動作を求めてみる．

$$x_1 = X(1 - e^{-t/T}) \quad \mathcal{L}x_1 = X \frac{1}{s(1 + Ts)} \quad (8.36)$$

$$(8.37)$$

\mathcal{L} はラプラス変換子を表す．これを式 (8.34) に代入すれば次式を得る．

$$x_2 = X \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) \frac{1 - T_2 s}{s(1 + T_1 s)(1 + T s)} \delta \quad (8.38)$$

これをラプラス逆変換を行い，実時間領域に変換すると舵の変動変位は次のように与えられる．

$$x_2 = X \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) \left[1 - \frac{1}{T - T_1} \left((T + T_2)e^{-t/T} - (T_1 + T_2)e^{-t/T_1} \right) \right] \quad (8.39)$$

$$T_1 = \frac{A_2 b}{an + (k/A_2)}, \quad T_2 = \frac{A_1 b}{am} \quad (8.40)$$

これを図で示すと， x_2 のように一次遅れの性質を示すことがわかる．なお，式 (8.39) で時定数 T_1, T_2 が T に比較して十分小さければ

$$x_2 \approx \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) X(1 - e^{-t/T}) = \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) x_1(t) \quad (8.41)$$

となり比例制御に近づくことがわかる．特に $k = 0$ ならば

$$x_2 \approx \frac{m}{n} x_1(t) = \frac{l_2}{l_1} x_1(t) \quad (8.42)$$

となり，フィードバックレバー比 l_2/l_1 で操縦桿と舵の運動が比例関係になる．図 8.3 は操作ピストン棒にかかる力 $f_2 = kx_2(t)$ と，操縦桿に感知される力 $f_1 = (A_1/A_2)f_2$ の時間的变化を示したもので，この操縦者が感じる力によって操縦感覚をよりリアルに感じることができ，また無理な操作を行わないため安全性の向上も期待できる．

8.0.6 油圧サーボ制御回路

図 8.4 の油圧サーボ制御回路において， λ_a, λ_b を入力側に， λ_3 を出力側に入れたモビリティとすれば，各点での絶対変位，および各要素の入出力端子の相対変位は下記ようになる．

$$x_1 = \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n \quad (8.43)$$

$$x_2 = x_3 = x_n \quad (8.44)$$

$$x_4 = -x_1 - h x_n = -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n \quad (8.45)$$

$$x_5 = x_1 - x_0 = -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n \quad (8.46)$$

$$(8.47)$$

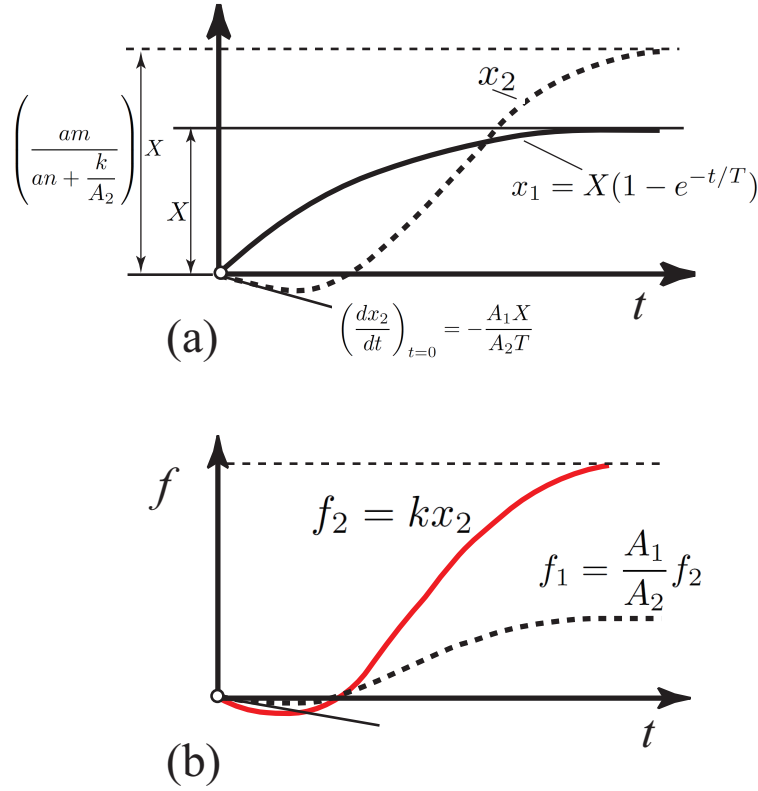


図 8.3: (a) 操縦桿に指数的変位を与えた時の舵の変位, および (b) 舵力・操縦桿力の変化

従って, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を旧座標での表記と考え新座標 (x_0, x_n) への座標変換と考え, 変換行列 C を用いて, 新座標でのインピーダンスマトリクスを求めると以下ようになる.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ -\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} \quad (8.48)$$

次に, 油圧サーボのインピーダンスマトリクスは次のようになる.

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -bs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

従ってこのシステムのインピーダンスマトリクスは次のようになる.

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -bs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

よって,

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{a\lambda_b - h}{\lambda_a + \lambda_b} & -\left\{ \frac{h(a\lambda_a + h)}{\lambda_a + \lambda_b} + bs + \frac{1}{\lambda_3} \right\} \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

となる．これより伝達マトリクスを変換公式により求めると以下ようになる．この式に，モビリティの値を入ると次のようになる．今 $f_n = 0$ とすればアクチュエータのピストンの変位 $x_n = 0$ は次のようになる．

以上 ここでインピーダンスマトリクス \mathbf{Z} を伝達マトリクス $\mathbf{\Gamma}$ へ変換公式（後述）を用いて変換してみる．

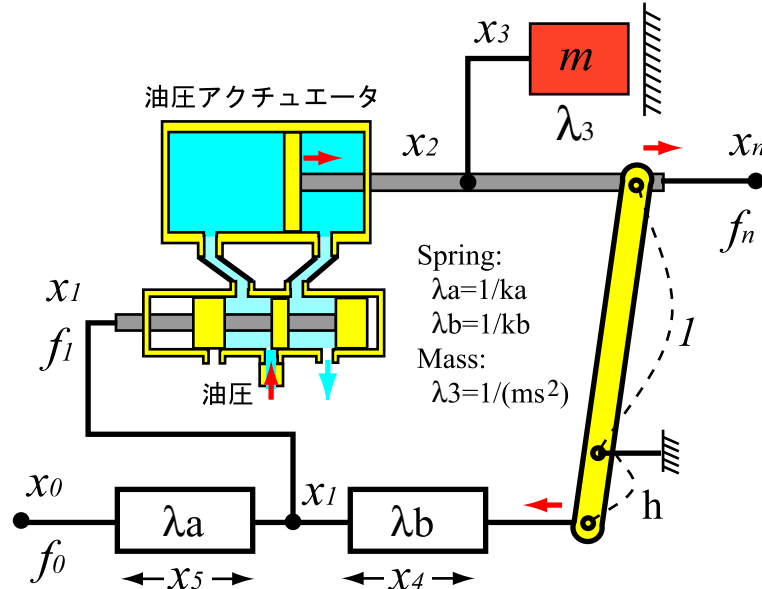


図 8.4: 油圧サーボ

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h(a\lambda_a + h) + (bs + \lambda_3^{-1})(\lambda_a + \lambda_b)}{a\lambda_b - h} & \frac{\lambda_a + \lambda_b}{a\lambda_b - h} \\ -\frac{ah + bs + \lambda_3^{-1}}{a\lambda_b - h} & \frac{1}{a\lambda_b - h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

ここで, $\lambda_a = 1/k_a, \lambda_b = 1/k_b$ のばね, $\lambda_3 = 1/(ms^2)$ の質量とすれば上式は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h(a + hk_a)k_b + (bs + ms^2)(k_a + k_b)}{(a - hk_b)k_a} & \frac{k_a + k_b}{(a - hk_a)k_b} \\ -\frac{(ah + bs + ms^2)k_b}{a - hk_b} & -\frac{k_a + k_b}{(a - hk_b)k_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

いま，出力端を自由 $f_n = 0$ とすると，油圧アクチュエータの変位 x_n は次のようになる．

$$x_n = \frac{(a - hk_a)k_b}{(k_a + k_b)(ms^2 + bs) + hk_b(a + hk_a)} x_0 \quad (8.56)$$

8.1 各マトリクスの変換公式

インピーダンス・マトリクス \mathbf{Z} ，モビリティ・マトリクス λ ，伝達マトリクス $\mathbf{\Gamma}$ の各マトリクスは相互に変換が可能である．表 8.1 にその変換公式を示す．

表 8.1: 各マトリクスの変換公式

インピーダンス・マトリクス	
$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	
$\mathbf{Z} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\Delta_\lambda} \begin{pmatrix} \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} D & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -A \end{pmatrix}$	
$\Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$	
モビリティ・マトリクス	
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$	
$\lambda \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\Delta_z} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} A & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -D \end{pmatrix}$	
$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$	
伝達マトリクス	
$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$	
$\mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{pmatrix} -z_{22} & 1 \\ -\Delta_z & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_{21}} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\Delta_\lambda \\ 1 & -\lambda_{22} \end{pmatrix}$	
$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$	

第 9 章

線形連続体の伝達マトリクス

伝達マトリクスは、力と変位の入力／出力の変換マトリクスとして表現した．この入出力関係は ”ばね，ダンパ，質量” の個別要素だけでなく，弾性梁，熱伝導などの連続体についても求められる．以下にその例を示す．

9.0.1 慣性体つきねじり軸

タービン船などのプロペラシャフト軸は相当重いもので，軸のねじり剛性のみでなく，分布質量も考慮する必要がある．図にはプロペラ軸とプロペラを慣性体として示した．(1) プロペラ軸の伝達マトリクス

図 9.1 の微小部分 dx の軸小片についてねじりの釣合を考える． G を材料の横弾性係数， J を軸の弾性二次モーメントとする．

$$\tau_x = GJ \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \tau_{x+dx} = GJ \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \right) \Rightarrow d\tau_x = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \quad (9.1)$$

ここで軸小片の回転軸の慣性トルクは次のようになる．

$$J\rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (9.2)$$

ここで軸小片に加わる軸トルクの差分 $d\tau$ と上式の軸小片の回転軸慣性トルクが，釣り合うことから

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = J\rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (9.3)$$

のプロペラ軸のねじれ振動方程式が得られる．そしてこの方程式の一般解は次のようになる．

$$\theta = a \sinh \nu x + b \cosh \nu x, \Rightarrow a = \text{const.}, b = \text{const.}, \nu = s \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (9.4)$$

ただし s は微分演算子を表す．ここで以下の境界条件を与え，

$$x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_1, \tau = \tau_1 \quad (9.5)$$

$$x = l \Rightarrow \theta = \theta_2, \tau = \tau_2 \quad (9.6)$$

$$(9.7)$$

定数 a, b を求め，伝達マトリクスを表すと次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \nu l & \frac{\sinh \nu l}{J\sqrt{\rho G}s} \\ J\sqrt{\rho G}s \sinh \nu l & \cosh \nu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

(2) 弾性体軸の振動

受動的機械回路ではエネルギー源が回路内に存在しないため，その行列式は1となる． $\Delta = \cosh^2 \nu l - \sinh^2 \nu l$ となる．振動現象なので， ω を角周波数として， $s = j\omega$ とすれば (3) 軸と慣性体の結合

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu l & \frac{\sin \mu l}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (9.9)$$

この弾性体軸に慣性体 I を直結し合成系の伝達マトリクスはその伝達マトリクスの積として表現できるから以下のようになる．

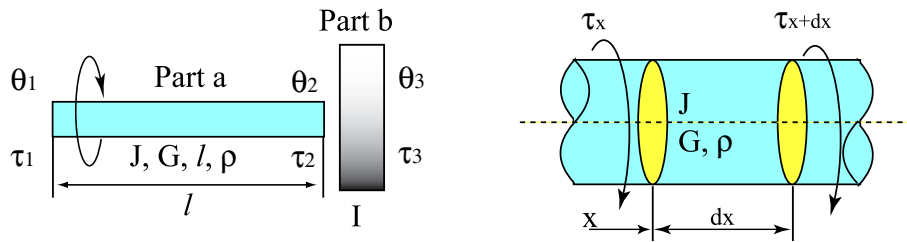


図 9.1: 慣性体つき弾性体軸

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \Gamma_{shaft} \cdot \Gamma_{rotor} = \begin{pmatrix} \cos \mu l & \frac{\sin \mu l}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l & \frac{1}{GJ\mu} \sin \mu l \\ -(GJ\mu \sin \mu l + \omega^2 I \cos \mu l) & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

固有振動

ここで弾性体軸の左端を $\theta_1 = 0$ ，慣性体 I の右端を $\tau_3 = 0$ とした場合，即ち軸の左側を固定し，右の慣性体を自由にしたときの固有角振動数を求めてみる．これは上式で $\theta_1 = \tau_3 = 0$ とし計算すると，

$$0 = \left(\cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l \right) \theta_2 + 0 \quad (9.12)$$

これから次式が得られる．この方程式を満たす ω が求める固有振動数となる．

$$\tan \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} l = \frac{J \sqrt{G\rho}}{I} \frac{1}{\omega} \quad (9.13)$$

となり， \tan 曲線と右辺の双曲線の交点から周波数固有値 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ と求めることができる．

強制振動

また軸の左側から $\theta_1 = \Theta_1 e^{j\omega t}$ の正弦波的角変位を与え， $\tau_3 = 0$ と右側の慣性体を自由にしたときの出力端の角変位 θ_3 と，入力端での励振トルク τ_1 は伝達マトリクスを用いて以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_3 = \frac{1}{A} \theta_1, \tau_1 = C \theta_3 = \frac{C}{A} \theta_3 \quad (9.14)$$

よって，

$$\theta_3 = \theta_3 = \frac{1}{A}\theta_1 = \frac{\Theta_1}{\cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l} e^{j\omega t} \quad (9.15)$$

$$\tau_1 = \frac{C}{A}\theta_3 = \frac{\omega^2 I + \omega J\sqrt{G\rho} \tan \nu l}{1 - \frac{\omega I}{J\sqrt{G\rho}} \tan \nu l} \Theta_1 e^{j\omega t} \quad (9.16)$$

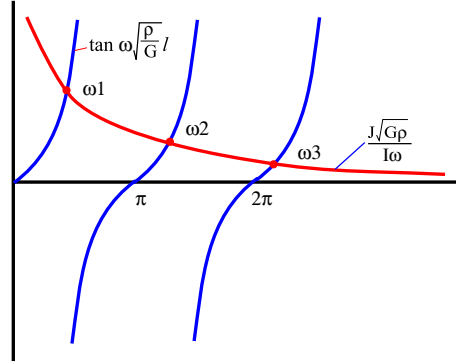


図 9.2: 固有振動数の解法

9.0.2 熱伝達問題

前例では変位と力に関して伝達マトリクスを論じた．差異量と流通量のアナロジーとして同じような方法で，温度 θ と熱流 q とを同様に取り扱える．

(1) 熱伝導問題 図 9.3 左側に示すような平面状の壁がある．壁の面積は F ，厚みは l である．この壁の熱伝達問題を解析する．ここで伝熱方程式は次のように表せる．

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (9.17)$$

ここに， $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ ：温度伝導率， λ ：伝熱率， c ：比熱， ρ ：密度

そしてこの方程式の一般解は次のようになる．

$$\theta = A \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x + B \sinh \sqrt{\frac{a}{s}} x \quad (9.18)$$

伝達マトリクス境界条件：熱流を受ける面積を F ，壁の入出壁間の距離を l ，入力熱流を q_1 ，出力熱流を q_2 とすると，

$$q_1 = -\lambda F \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}, \quad q_2 = -\lambda F \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} \quad (9.19)$$

境界条件から定数 A,B を求め、伝達マトリクスを表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l}{\lambda F \sqrt{\frac{s}{a}}} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

(2) 板の表面における熱流

図 9.3 真中に示すような壁を考える。板の表面における熱流量を考えると次式のようになる。

$$q = \alpha F (\theta_1 - \theta_2) \quad (9.21)$$

この場合、 α は (または放熱率)、壁材に熱が吸収されるとき θ_1 は大気温度、 θ_2 は壁表面温度となる。この場合壁に密着する大気層の熱容量を無視すれば $q_1 = q_2$ と仮定できる。よって、この場合の熱吸収放散に関するマトリクス方程式は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

(3) 吸熱・放熱を考慮した場合の熱伝達問題

図 9.3 右側のように壁の左側から吸熱し、右側から放熱する伝熱問題を考える。流入側の吸熱率を α_1 、放熱側の放熱率を α_2 とすると、この系全体の熱伝達マトリクス方程式は、式 (9.20),(9.22) を直列に接続した以下のような熱伝達マトリクス方程式になる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l}{\lambda F \sqrt{\frac{s}{a}}} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha F} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

ここで定常流の場合では微分演算子 $s=0$ とすればよいから、上式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha_1 F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha_2 F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda F \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_2 F} & 0 \\ \frac{1}{\alpha_2 F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

すなわち、定常伝熱計算でよく知られる次の公式となる。

$$q_1 = q_2 = \frac{F}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} (\theta_1 - \theta_2) \quad (9.25)$$

9.0.3 熱の過渡現象問題

厚さ $2l$ の平行板の表面温度が $t = 0$ で突然 Θ だけ温度上昇したとする。 $x = l$ における平行板の中心温度を求める。ただし、 α は無限大と仮定する。表面温度は δ をデルタ関数とすると、

$$\theta_1 = \Theta \frac{\delta}{s} \quad (9.26)$$

となる．中心点 $x = l$ では対称性から $q_2 = 0$ とすれば（ ちょっと強引 ），以下の式が得られる．

$$\theta_2 = \frac{\Theta}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l} \delta \quad (9.27)$$

これをラプラス逆変換をすれば求める解が得られる．

図 9.4 のように多種材料を用いた層成壁の熱過渡現象問題を解く場合は，各層の伝熱マトリクスを下記のよう

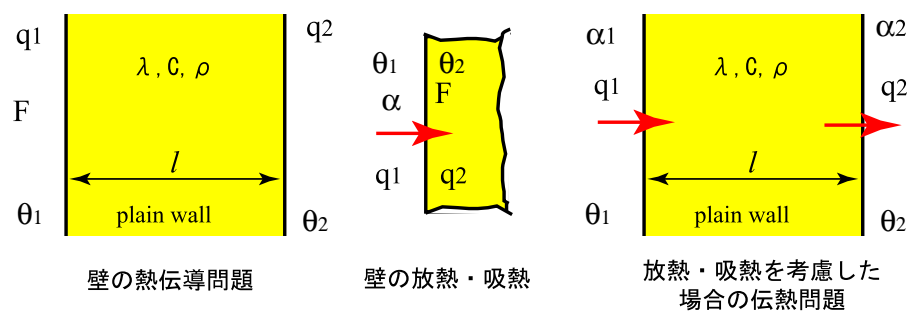


図 9.3: 熱伝導問題

に組合わせて多層壁の伝熱マトリクスを構成することからとくことも可能である．

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1} \Gamma_n \begin{pmatrix} q_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

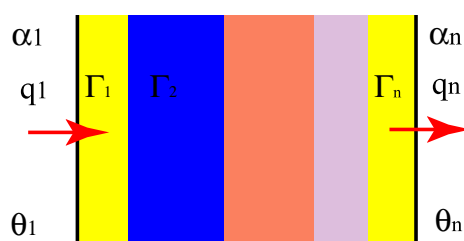


図 9.4: 多層壁の熱伝導問題

以上おわり．

第 10 章

いろいろな電気・機械要素の伝達マトリクス

10.0.4 電気要素

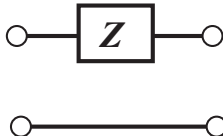
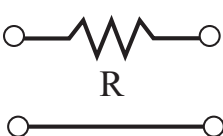
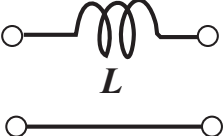
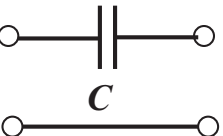
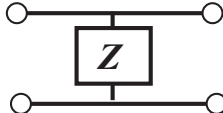

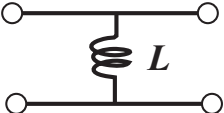
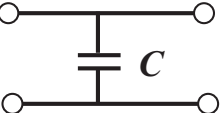
インピーダンス	レジスタンス	インダクタンス	キャパシタンス
(1) 	(2) 	(3) 	(4) 
$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & sL \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(5) 	(6) 	(7) 	(8) 
$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{sL} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{bmatrix}$

図 10.1: 電気系における伝達マトリクス

10.0.5 機械要素（並進系）

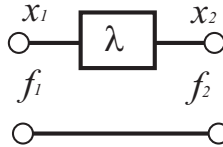
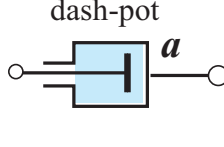
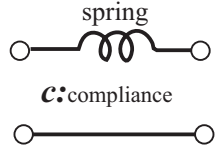
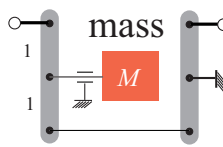
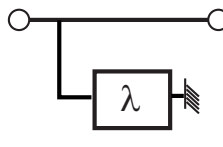
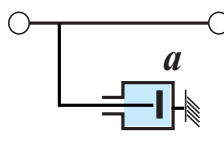
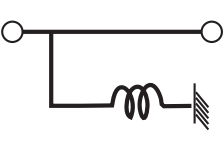
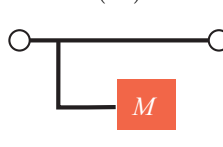
インピーダンス	粘弾性	バネ	質量
(9) 	(10) 	(11) 	(12) 
$\begin{bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{as} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{Ms^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(13) 	(14) 	(15) 	(16) 
$\begin{bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ as & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C^{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Ms^2 & 1 \end{bmatrix}$

図 10.2: 機械系における伝達マトリクス

10.0.6 機械要素（回転系）

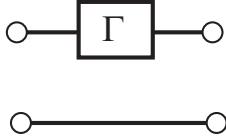
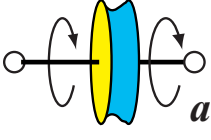
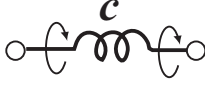
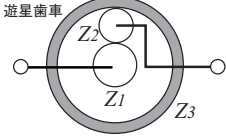
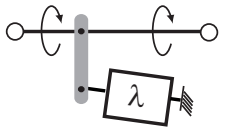
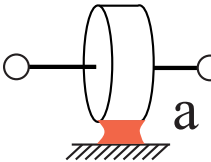
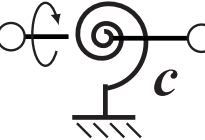
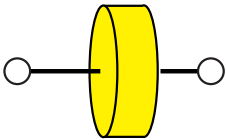
インピーダンス	粘弾性	バネ	慣性
(17) 	(18) 	(19) 	(20) 
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{as} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2}{z_1} & \frac{z_3}{z_1 I s^2} \\ 0 & \frac{z_1}{z_1 + z_2} \end{bmatrix}$
(21) 	(22) 	(23) 	(24) 
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ as & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C^{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I s^2 & 1 \end{bmatrix}$

図 10.3: 回転機械系における伝達マトリクス

10.0.7 機械要素（その他）

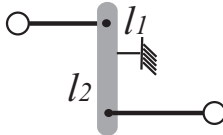
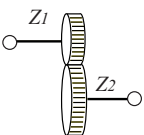
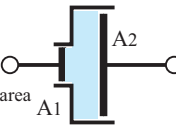
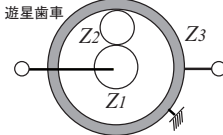
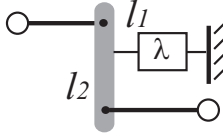
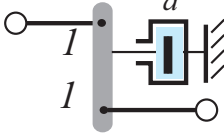
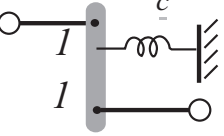
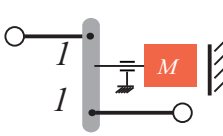
インピーダンス			
(25)	(26)	(27)	(28)
			
$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{z_2}{z_1} & 0 \\ 0 & -\frac{z_1}{z_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_2}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{A_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2}{z_1} & 0 \\ 0 & \frac{z_1}{z_1 + z_2} \end{bmatrix}$
(29)	(30)	(31)	(32)
			
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{l_2} & \lambda \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \\ 0 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{as} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -4c \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{Ms^2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

図 10.4: その他機械系における伝達マトリクス

10.0.8 連続系要素

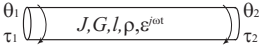

(33)heavy torsion shaft sinusoidal input	(34)vibration beam
<p>heavy torsion shaft sinusoidal input</p>  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ $\mu = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$	<p>vibration beam</p>  $\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = \frac{s\rho}{IE} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$ $\mu = \sqrt{\omega} \left(\frac{s\rho}{EI} \right)^{1/4}$
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu l & \frac{1}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\cosh \mu l + \cos \mu l} \begin{bmatrix} \cosh \mu l \cos \mu l & -\frac{j\omega}{El\mu^3} \alpha \\ \frac{El\mu^3}{j\omega} \alpha & 2 \cosh \mu l \cos \mu l \end{bmatrix}$ $\alpha = (\sinh \mu l \cos \mu l - \cosh \mu l \sin \mu l)$

図 10.5: 連続系における伝達マトリクス (梁)

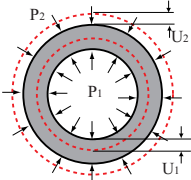
	(35) thick cylinder under radial stress
	$\begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k} \left(k^2 + 1 + \frac{(k^2 - 1)}{\nu} \right) & \frac{(k^2 - 1)}{4\pi k E} \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) \\ \frac{\pi}{k} (k^2 - 1) E & \frac{1}{2k} \left(k^2 + 1 - \frac{(k^2 - 1)}{\nu} \right) \end{bmatrix}$ <p>P_1, P_2 : total pressure on the surfaces per unit axial length. $k = (r_2/r_1)$ r_1 : inner radius, r_2 outer radius, E : young's modulus, ν : poisson's number</p>

図 10.6: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱)

10.0.9 熱伝導における伝達マトリクス

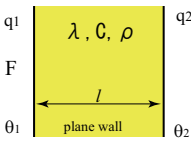
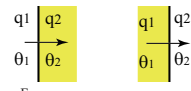
 <p> $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ $q_1 = -\lambda F \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_1$ $q_2 = -\lambda F \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_2$ </p>	<p>(36) conduction of heat ; plane wall</p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{\lambda F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: right;"><i>steady state</i></p> <p>$\lambda : \text{conductivity} \quad C : \text{capacity} \quad F : \text{area}, \quad s = \frac{\partial}{\partial t}$</p>
<p>(37)</p>  <p>$F : \text{area}$</p>	$\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{\alpha F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p>$\alpha : \text{heat transmission constant}$</p>

図 10.7: 連続系における伝達マトリクス (壁の熱伝導)

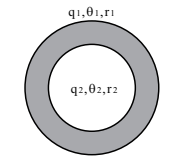
 <p> $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ $\mu = \sqrt{\frac{s}{a}}, \text{ for steady state}$ </p>	<p>(38) conduction of heat; hollow cylinder</p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \frac{s}{a} U_1(r_1, r_2) & 2\pi \lambda l \frac{1 - \frac{s}{a} r_1 r_2 U_1(r_1, r_2) U_1(r_2, r_2)}{U_0(r_2, r_1)} \\ -\frac{U_0(r_2, r_1)}{2\pi \lambda l} & r_2 \sqrt{\frac{s}{a}} U_1(r_1, r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p> $U_0(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_0(\mu r_n) - I_0(\mu r_m) K_0(\mu r_n)$ $U_1(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_1(\mu r_n) - I_0(\mu r_m) K_1(\mu r_n)$ </p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \lambda l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$
---	---

図 10.8: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱熱伝導)

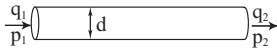
	(39) flow in thin tube
 $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{32\nu}{d^2} \frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ $\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{c^2 \rho}{F} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4}$ <p> $\nu = \mu/\rho$ kinematic viscosity $c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ sound velocity </p>	$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & b \frac{s}{a} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l}{b \frac{s}{a}} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$ $a = \frac{\gamma P_0 d^2}{32\mu}, \quad b = \frac{\pi P_0 d^4}{32\mu}$ <p> μ : viscosity, γ : exponent of polytropic change p_0 : mean pressure, q : flow cc/s </p>

図 10.9: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱熱伝導)

10.0.10 油圧系における伝達マトリクス

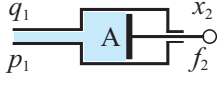

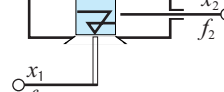
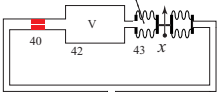
hydraulic power actuator	servo-actuator	follow-up servo(proportional)	differential action
<p>(44)</p>  $Ap_1 - f_2 = b \frac{dx_2}{dt}$	<p>(45)</p>  $f_2 = ax_1 - b \frac{dx_2}{dt}$	<p>(46)</p>  $f_2 = a(X_1 - X_2) - b \frac{dX_2}{dt}$	<p>(47)</p>  $x = a(p_1 - p_2)$
$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{b}{A}s & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$ <p>A : piston area b : resistance constant</p>	$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a}s & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$ $x_2 \approx \frac{a}{b} \int x_1 dt$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{b}{a}s & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & as \\ k & k\alpha s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ f_3 \end{bmatrix}$ $\alpha = \frac{V}{\gamma RT}$ $x = \frac{as}{s + \frac{1}{k\alpha}} \approx k\alpha a \frac{dp_1}{dt}$

図 10.10: 油圧系における伝達マトリクス