

### ヤコビ行列(Jacobian)

ここでは、ヤコビアン(Jacobian)と呼ばれるロボティクスによく表れる重要な行列についても解説を行う。ヤコビ行列は関節の速度と手先位置の速度を関係付ける行列として、次のような形で表れてくる。

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}} \cdots (1)$$

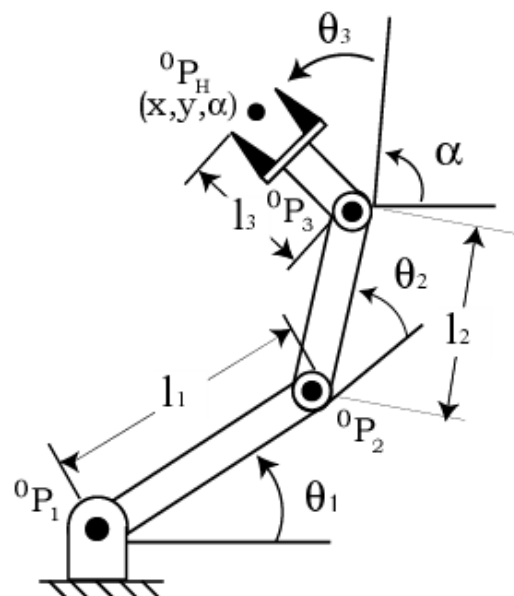
<例> 右図マニピュレータの手先座標の微分値と関節角度の微分値の関係は以下ようになる。

$$\dot{x} = -l_1 \dot{\theta}_1 s_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s_{12} - l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) s_{123}$$

$$\dot{y} = l_1 \dot{\theta}_1 c_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c_{12} + l_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) c_{123}$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y, \alpha)^T$ 、 $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$  とおき、上式を表現すると、



$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}(t)) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

### 1. ヤコビ行列の定義

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$  をヤコビアン(ヤコビ行列)ともいう。 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  は手先速度と関節角速度の関係を表す。式からも明らかのように、 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  はマニピュレータの姿勢によって変化することが分かる。

ここで  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  は一般的に以下のように計算される。

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \frac{\partial r_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad \left\{ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_n \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix} \right\} \cdots (2)$$

ここで  $\mathbf{r}$  の表現として、手先の姿勢を表すのに オイラー角、瞬間回転軸方向の角速度ベクトルで表す 2 通りがある。ヤコビ行列もそれに応じて 2 通りの表現方法がある。

オイラー角表現

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{0}\mathbf{p}_H \\ \dot{0}\phi_H \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \dots \cdot (3)$$

${}^0\mathbf{p}_H, {}^0\phi_H$  はそれぞれ基準座標系{0}に対する手先座標系の位置と姿勢を示す。

瞬間回転軸方向の角速度ベクトル

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{0}\mathbf{p}_H \\ \dot{0}\omega_H \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \dots \cdot (4)$$

${}^0\omega_H$  は基準座標系{0}に対する角速度ベクトルを表す。

$\mathbf{J}_r$  と  $\mathbf{J}_v$  の変換公式は存在するが(参考文献「2」), 本講義では触れないことにする。 $\mathbf{J}_r$  と  $\mathbf{J}_v$  は手先の回転軸方向が変わらない場合は, 本質的に同じものと考えることができる。しかし, 手先姿勢が3自由度ないし2自由度の回転運動をするマニピュレータでは一般に異なる。

## 2. ヤコビ行列の求め方

ヤコビ行列は上式のように解析的に求めることも可能である。一方, 関節角度の微小回転とアーム先端の位置と姿勢の微小変化量の関係を示すものであるため, この幾何学的関係を利用して求めることも可能である。

### (1) 回転成分

右図には, 関節  $i$  について, その回転軸ベクトル  ${}^0\hat{z}_i$  の回りに微小回転  $\dot{\theta}_i$  した状態を示す。ここでその他の

関節は固定と考えると, この微小回転  $\dot{\theta}_i$  によって生じる手先の微小回転は, 手先でもまったく同じとなることから, 全ての関節の微小回転による手先回転の総和は次のようになる。

$${}^0\omega_H = {}^0\hat{z}_1\dot{\theta}_1 + {}^0\hat{z}_2\dot{\theta}_2 + \dots + {}^0\hat{z}_n\dot{\theta}_n \quad \dots \cdot (5)$$

### (2) 変位成分

同様に, 微小回転  $\dot{\theta}_i$  によって生じる手先の微小変位

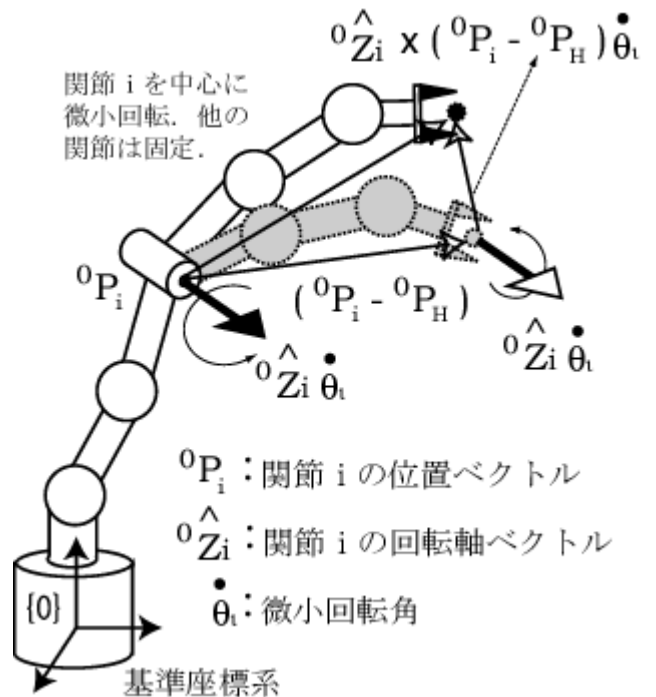
${}^0\dot{\mathbf{p}}_H$  は関節  $i$  から手先までのベクトルが  $({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_i)$  であることから次式となる。

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_H = {}^0\hat{z}_i \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_i) \dot{\theta}_i \quad \dots \cdot (6)$$

よって, 全ての関節の微小回転による手先変位の総和は,

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_H = {}^0\hat{z}_1 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_1) \dot{\theta}_1 + {}^0\hat{z}_2 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_2) \dot{\theta}_2 + \dots + {}^0\hat{z}_n \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_n) \dot{\theta}_n \quad \dots \cdot (7)$$

となる。以上をまとめると次式になる。



$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_H \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\hat{z}_1 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_1) & {}^0\hat{z}_2 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_2) & \cdots & {}^0\hat{z}_n \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_n) \\ {}^0\hat{z}_1 & {}^0\hat{z}_2 & \cdots & {}^0\hat{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \cdots (8)$$

よってヤコビ行列は次式となる．

$$\mathbf{J}_v(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{z}_1 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_1) & {}^0\hat{z}_2 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_2) & \cdots & {}^0\hat{z}_n \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_n) \\ {}^0\hat{z}_1 & {}^0\hat{z}_2 & \cdots & {}^0\hat{z}_n \end{bmatrix}$$

但し関節  $i$  が直動関節の場合，上式の導出過程からも明らかなように，手先の回転変位には影響を与えず，変位へは  ${}^0\hat{z}_i$  方向への変位分  $d_i$  となる．

$$\mathbf{J}_v \text{ の成分， } \begin{bmatrix} {}^0\hat{z}_i \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_i) \\ {}^0\hat{z}_i \end{bmatrix} \text{ の代わりに， } \begin{bmatrix} {}^0\hat{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ となる．}$$

<例>最初に示した3リンク機構について例を示す．最初の例は解析的に求めたが，同じ計算を上記の方法で行う．

まず，各関節の基準座標 $\{0\}$ からの位置ベクトル  ${}^0\mathbf{p}_i$  は以下ようになる．

$${}^0\mathbf{p}_H = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} l_2c_{12} + l_3c_{123} \\ l_2s_{12} + l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} l_3c_{123} \\ l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

また，その回転軸ベクトル  ${}^0\hat{z}_i$  は今回回転が2次元平面なため，全て同じで次のようになる．

$${}^0\hat{z}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\hat{z}_1 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_1) = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(l_1s_1 + l_2s_{12} + l_3s_{123})\hat{x} + (l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123})\hat{y} + 0\hat{z}$$

$${}^0\hat{z}_2 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_2) = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_2s_{12} + l_3s_{123} & 0 \end{bmatrix} = -(l_2s_{12} + l_3s_{123})\hat{x} + (l_2c_{12} + l_3c_{123})\hat{y} + 0\hat{z}$$

$${}^0\hat{z}_3 \times ({}^0\mathbf{p}_H - {}^0\mathbf{p}_3) = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_3c_{123} & l_3s_{123} & 0 \end{bmatrix} = -(l_3s_{123})\hat{x} + (l_3c_{123})\hat{y} + 0\hat{z}$$

以上の式から変位と回転についてのヤコビ行列  $J_v$  は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_3s_{123} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

但し,  ${}^0\mathbf{p}_H = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$   ${}^0\boldsymbol{\omega}_H = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  である。

### 3. 逆ヤコビ行列

これまでに  $v = J_v(q)\dot{q}$  用いて関節速度から手先速度への変換を示した(関節角速度 手先速度)。本節では, 手先速度 関節速度, 即ち与えられた手先速度を実現する関節速度を求める問題について述べる。

まず  $J_v$  が  $m \times m$  の正方行列とする。このとき  $\det J_v \neq 0$  である場合には逆行列が存在し,

$$\dot{q} = J_v^{-1}(q)v \dots (9)$$

から計算できる。

次に関節の自由度数  $n$  が, マニピュレータ先端の自由度数  $m$  より多い場合 ( $n > m$ ) で  $\text{rank} J_v = m$  とする。このような制御が可能な自由度が  $(n - m)$  個多い, いわゆる冗長マニピュレータ (redundant manipulator) の場合, 駆動法は無数に存在する。このときの逆ヤコビ行列は以下の擬似逆行列  $J_v^+$  として求められる。詳細は参考文献[2]を参照のこと。

$$J_v^+ = J_v^T (J_v J_v^T)^{-1} \dots (10)$$

上記以外の条件,  $\text{rank} J_v \leq n < m$  ではマニピュレータ先端の速度を実現する関節自由度は存在しない。

<例> 右図の2リンクマニピュレータが  $\hat{X}$  軸に沿って 1.0m/s で動かす関節角速度を求めよ。

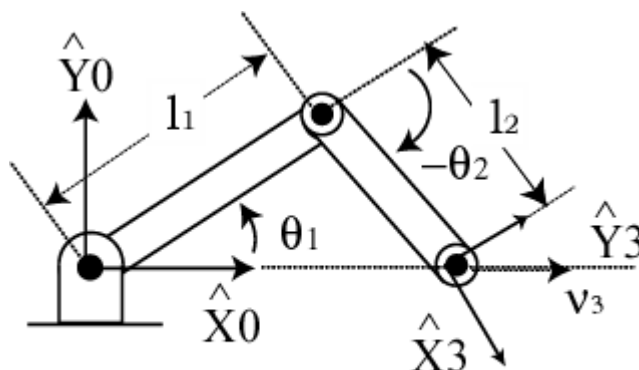
まずヤコビ行列を求める。

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}$$

逆行列を計算すると

$$J^{-1}(q) = \frac{1}{l_1l_2s_2} \begin{bmatrix} l_2c_{12} & l_2s_{12} \\ -l_1c_1 - l_2c_{12} & -l_1s_1 - l_2s_{12} \end{bmatrix}$$

$\hat{X}$  軸方向の速度 1.0m/s で動かした場合の関節角速度は,



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{c_{12}}{l_1 s_2}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2}$$

となる。

明らかに、アームが伸びきった状態  $\theta_2 = 0$  に近づくにつれて、関節角速度は無限大に近づく。即ち、実現不可能となっていくことが分かる。

### 特異姿勢

ヤコビ行列はマニピュレータの姿勢の関数であり、ヤコビ行列が  $\det \mathbf{J} = 0$  となる姿勢を特異姿勢と呼ぶ。上の例では  $\det \mathbf{J} = l_1 l_2 \sin(\theta_2)$  となり、 $\theta_2 = 0, \pi$  で特異姿勢となる。これは右図のように到達点可能域限界のところであり、マニピュレータ先端と原点とを結ぶ方向には運動することができない。このような状況を自由度が縮退(derogate)したという。

このような特異姿勢は通常の産業ロボットでは可動範囲内に多数存在する。対策としては、機構を工夫して特異姿勢が生じる位置を作業上重要でない領域に移したり、関節角度制限を設けて特異姿勢に達するのを防止する工夫を行っている。この特異点への対応はロボット工学の一つの重要な研究テーマとなっている。

