「物理学概論II」電磁気

真空中の静電場

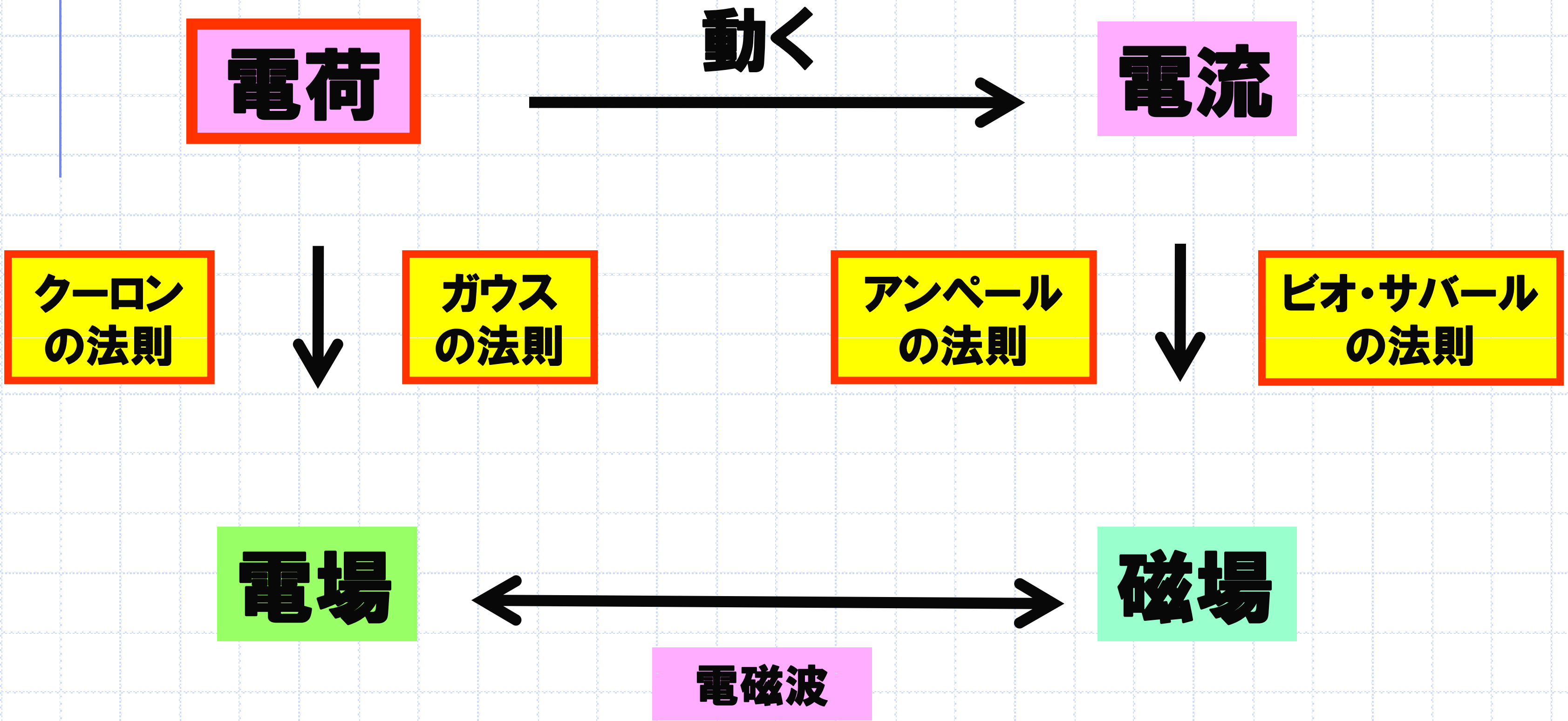
クーロンの法則，ガウスの法則

知能機械専攻

下 条　誠

はじめに

電磁気学：電気と磁気の学問分野



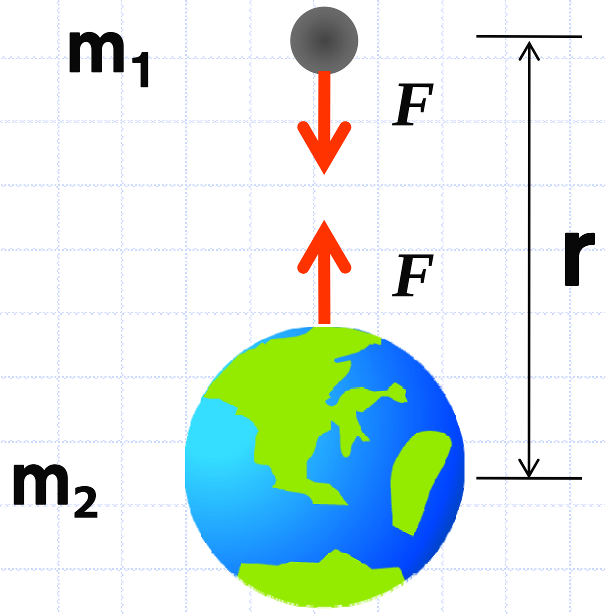
目次

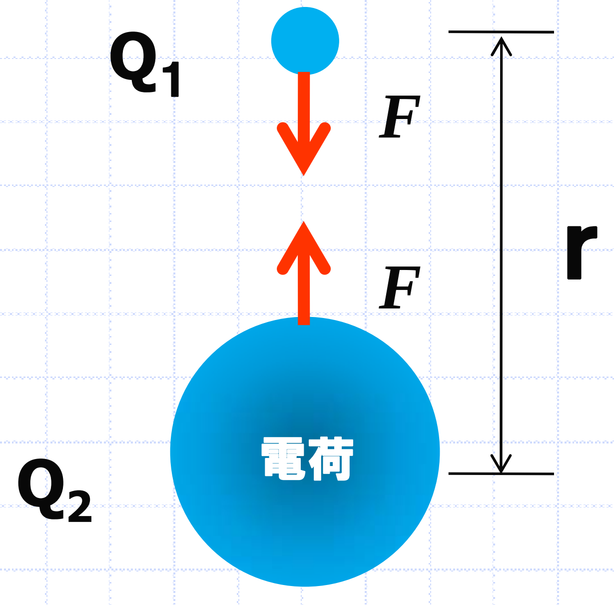
1. クーロンの法則
2. 電場
3. ガウスの法則
4. 電流と磁場(ビオ・サバールの法則)
5. アンペールの法則
6. 物質中の電場と磁場

電荷と電界イントロ

まず始めに，電荷と電界の関係，クーロンの法則，ガウスの法則について述べる

クーロンの法則





ニュートンの万有引力の法則

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

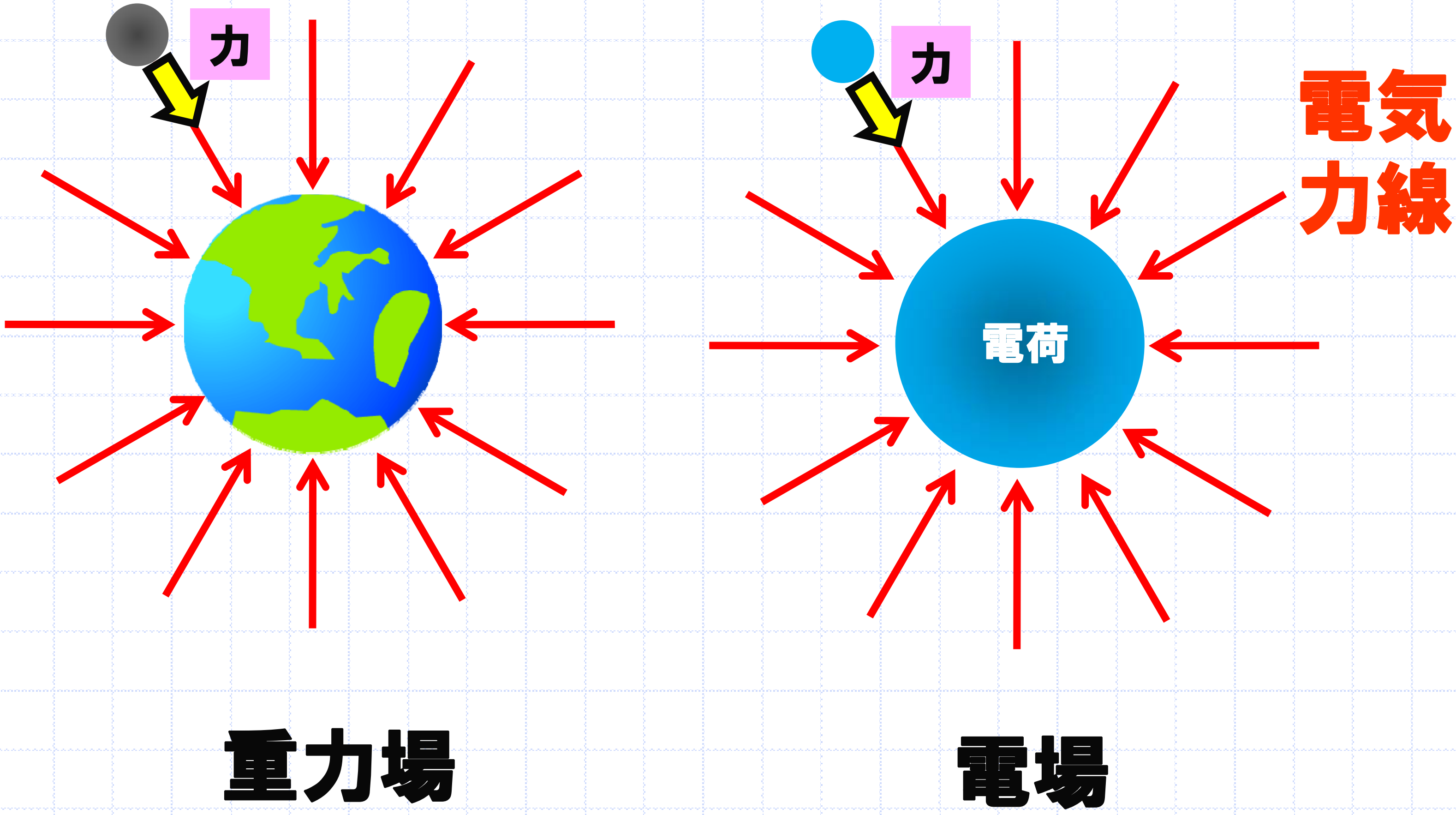
$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

クーロンの法則

重力の場

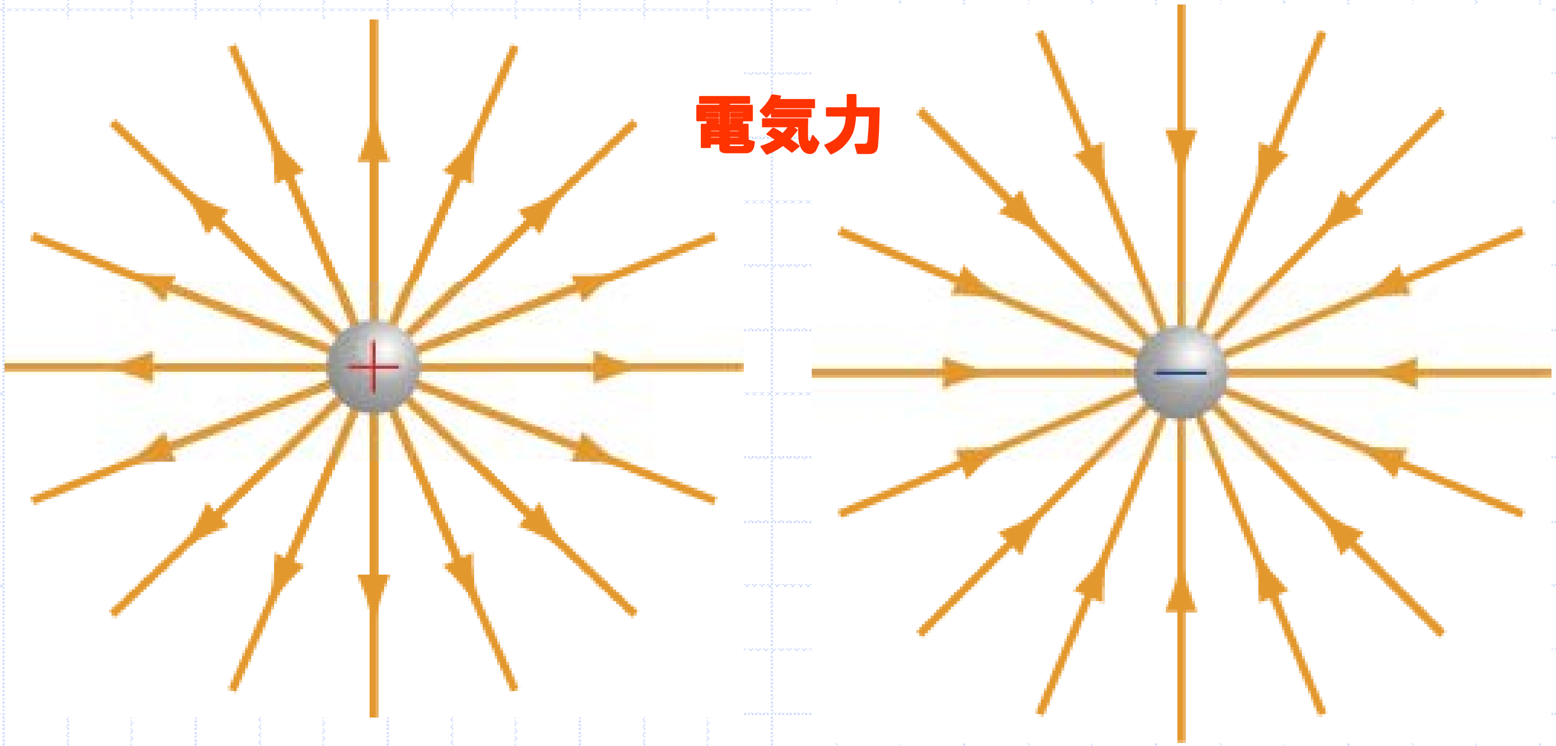
電気的力の場

電場とは



電気力線とは1

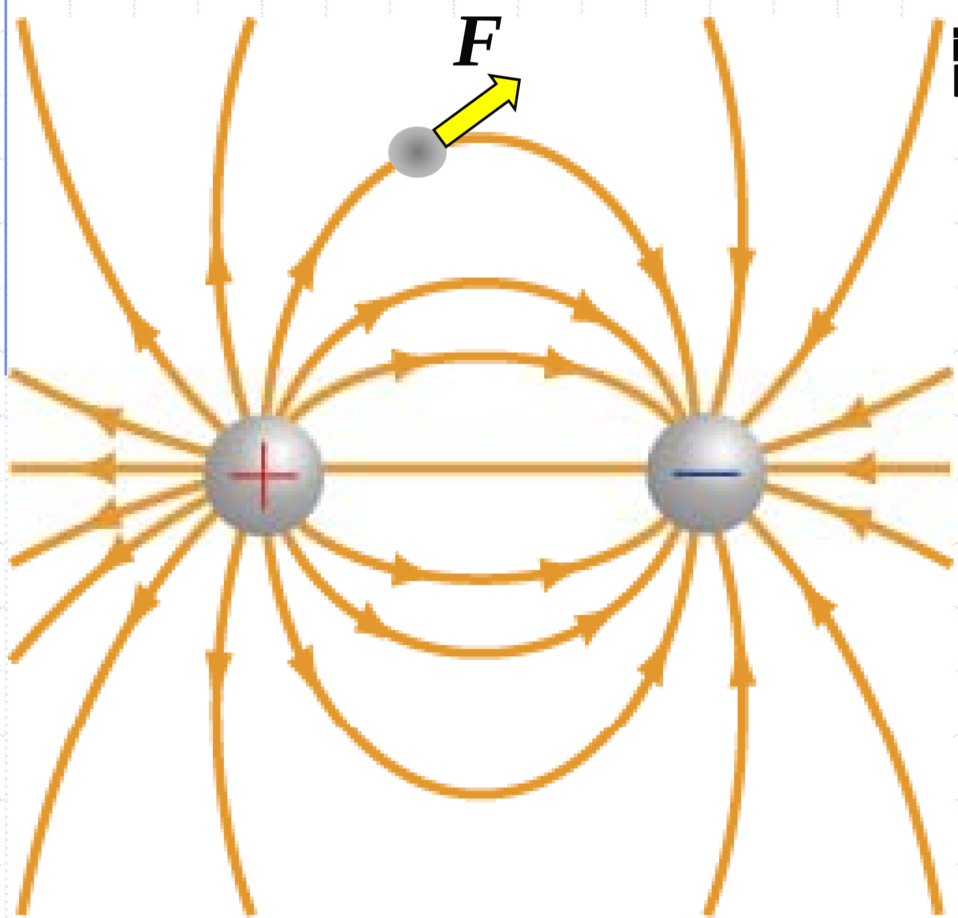
- 電場を目で見れるようにしたもの
- 電場の方向を示す



プラスの電荷 湧き出す

マイナスの電荷 吸い込む

電気力線とは2

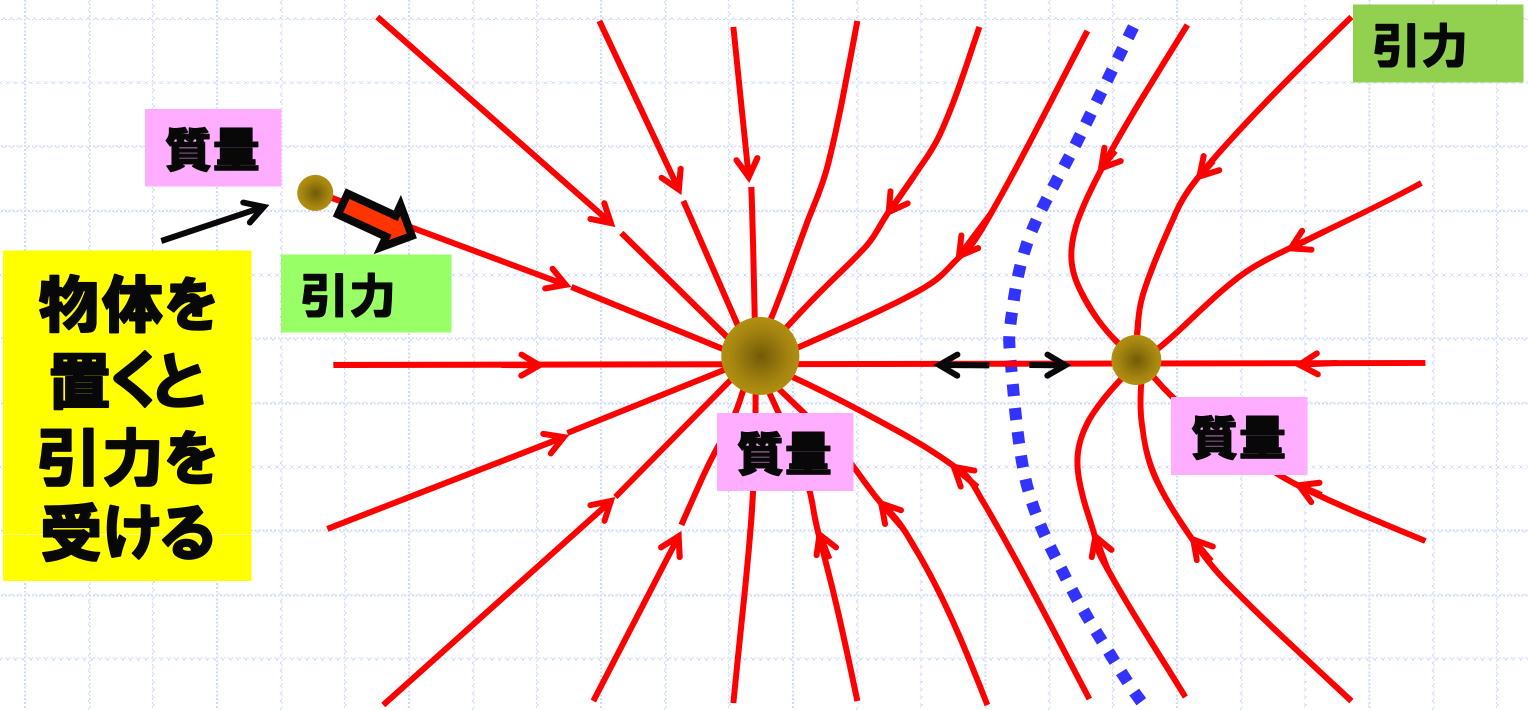


電気力線は，プラスの電荷から湧き出し，マイナスの電荷に吸い込まれる．

流体に例えると，

- ＋電荷は**湧き出し口**
- − 電荷は**吸い込み口**
- 電気力線は**流線**に相当する

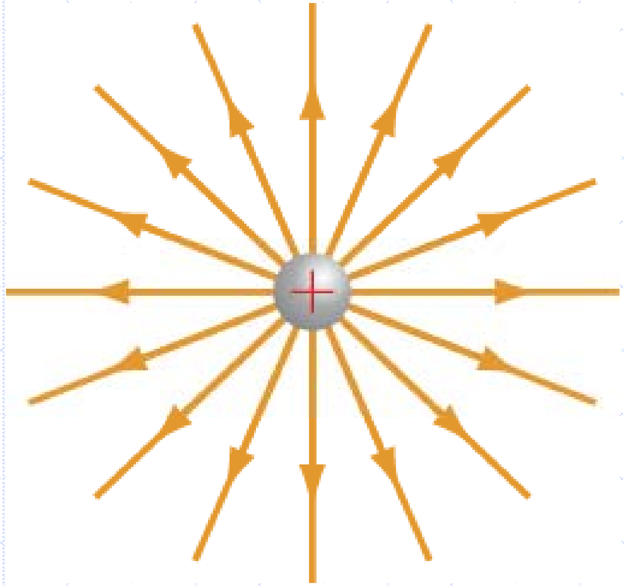
電場を重力場とのアナロジーで想像する

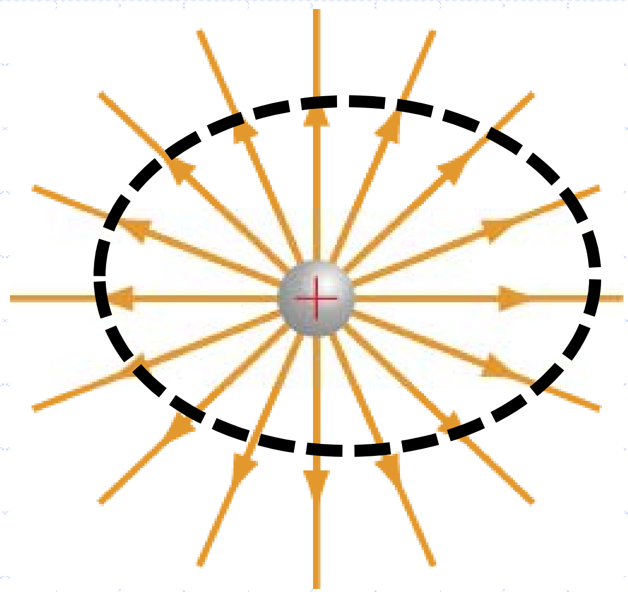


質量が異なる2物体が作る重力の力線

ガウスの法則とは1

電気力線を流体とのアナロジーで考える

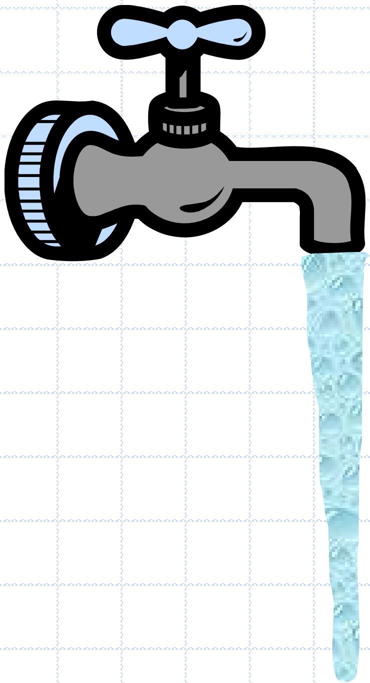


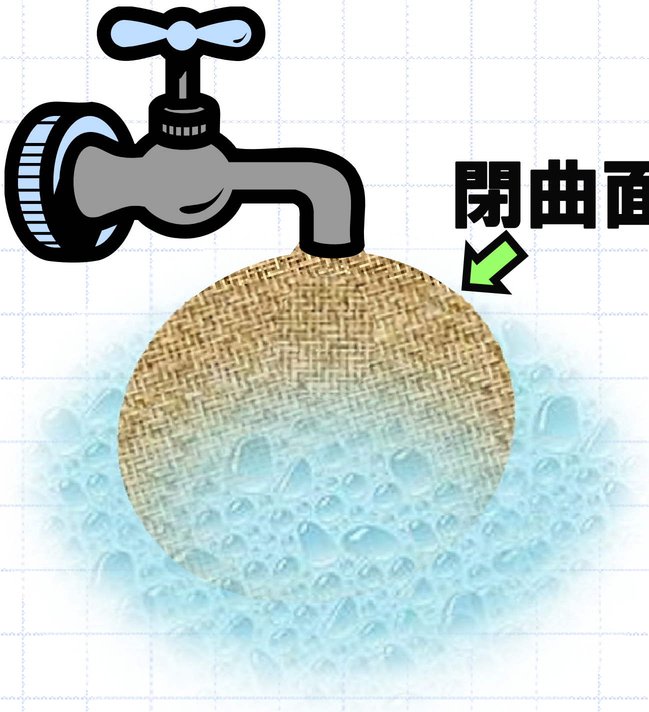


湧き出し口から，
水がわき出ている

湧き出し口から出る水の量と，点線の境界を通る水の量は等しい

ガウスの法則とは2





水道の蛇口から出る水の量 ＝ 閉曲面Sから出る水の量

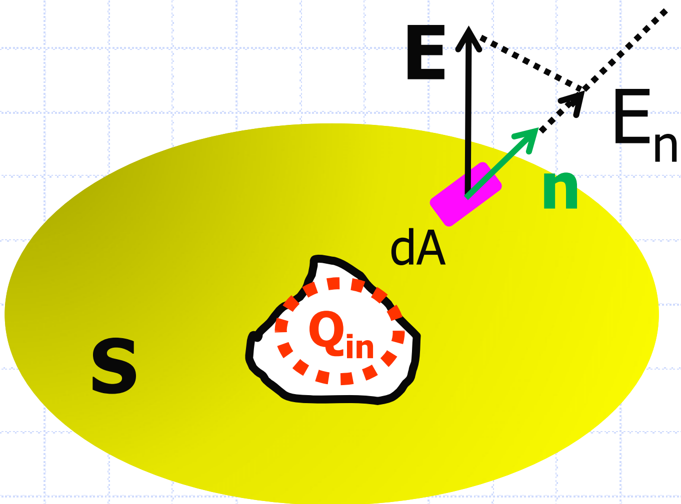
ガウスの法則とは3

数式でもっともらしく記述すると以下のようになる

閉曲面Sの内部から外へ出てくる正味の**電気力線束Φ_E**

=

閉曲面S内部の**全電気量Q_{in}/ε_0**



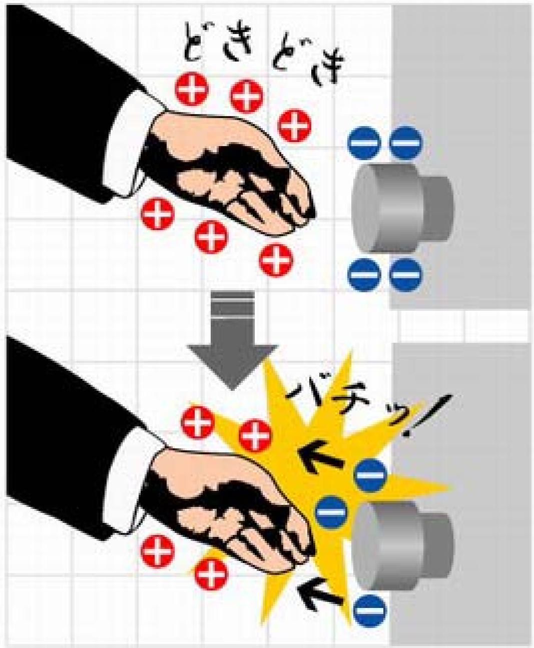
$$\iint_S E_n dA = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

各論のはじまり

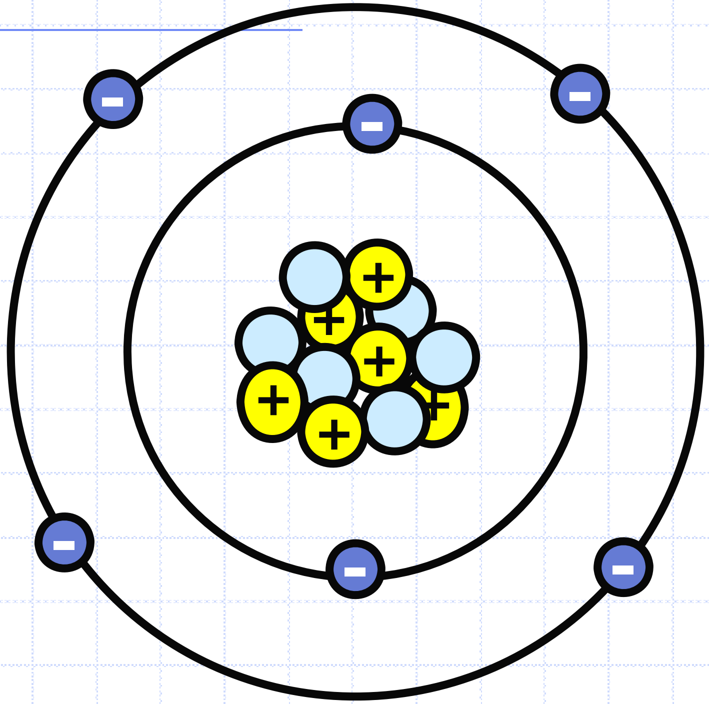
電荷とは

電荷とは物体の帯びている電気のこと.

静電気:物体に電荷が蓄えられている状態.電荷が静止していて流れていないので静電気という.



電荷とは



原子：

- 陽子は正電荷を持ち,
- 電子は負電荷を持つ.

静電気：

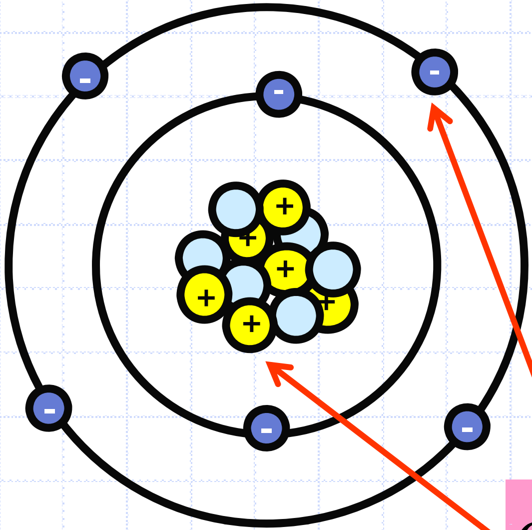
- 電子が奪われやすいものほど プラスに帯電
- 電子を捕獲しやす いほどマイナスに帯電

電荷と保存則

- 電荷には正と負の2種類がある
- 電荷は保存される.
- 電荷の単位クーロン[C]

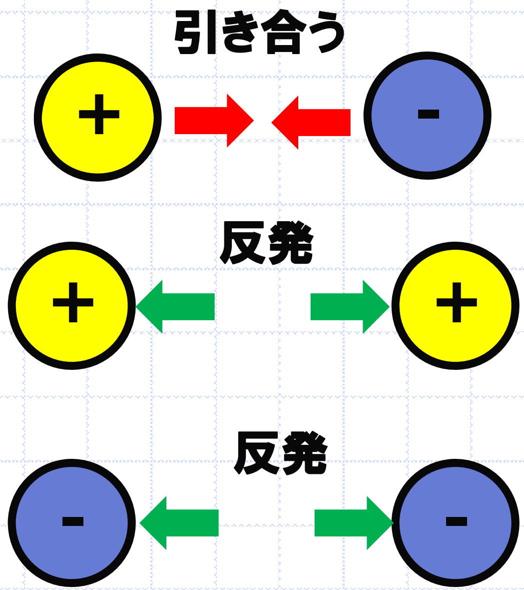
物質の全電荷＝陽子の総数×e+電子の総数×-e

（通常では陽子電子の消滅・生成はない）

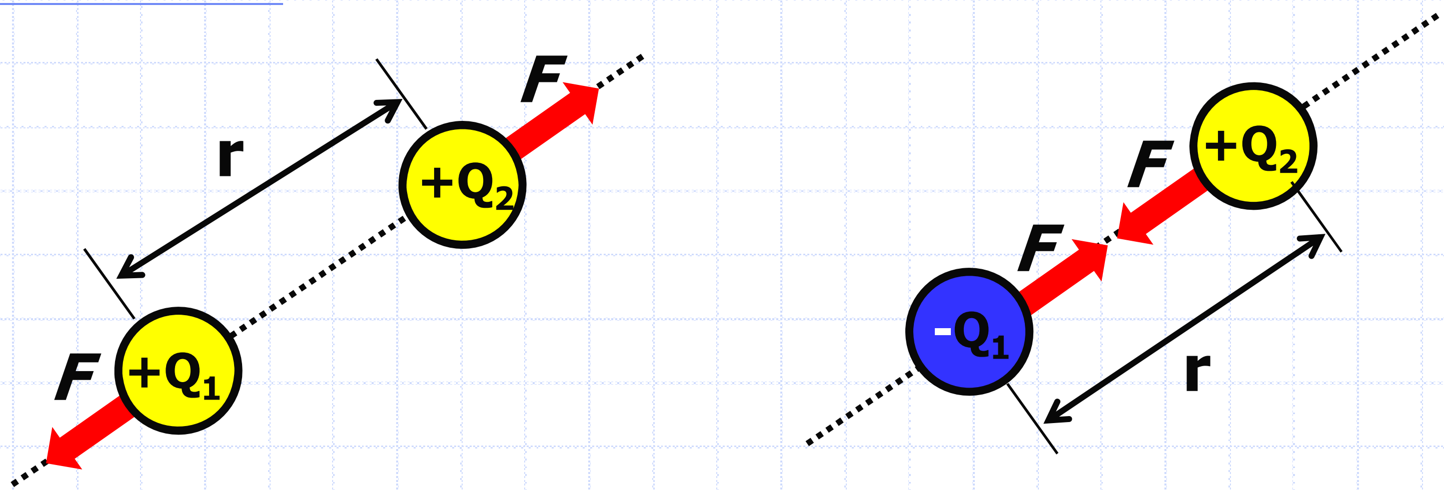


電気素量，素電荷

$$e \cong 1.60 \times 10^{-19} [C]$$



クーロンの法則



$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (\text{真空中})$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \ N \cdot m^2 / C^2$$

F: ニュートン[N]

Q: クーロン[C]

r: メートル[m]

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 / \left(N \cdot m^2\right)$$

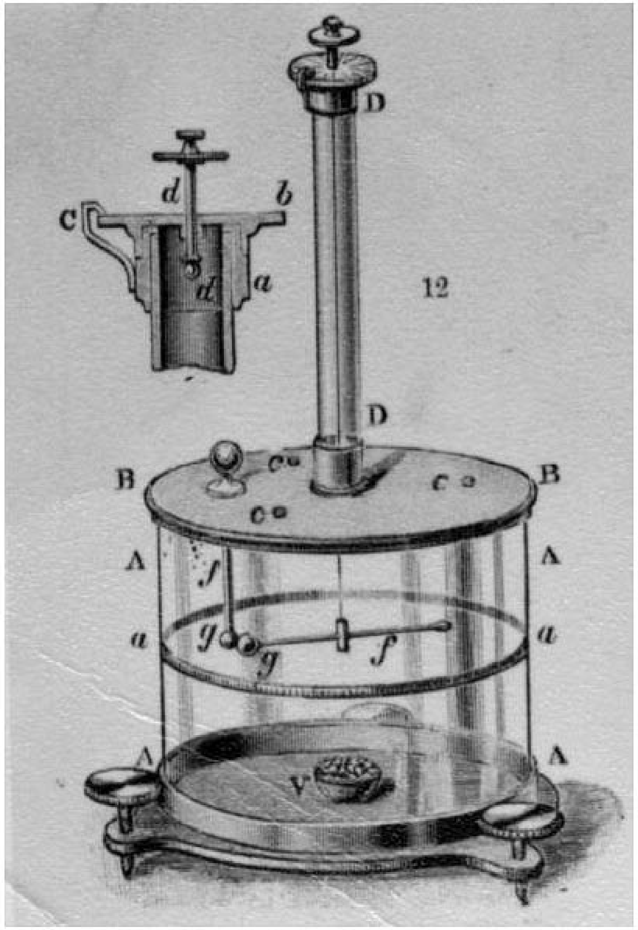
真空の誘電率

クーロン

シャルル・オーギュスタン・ド・クーロン

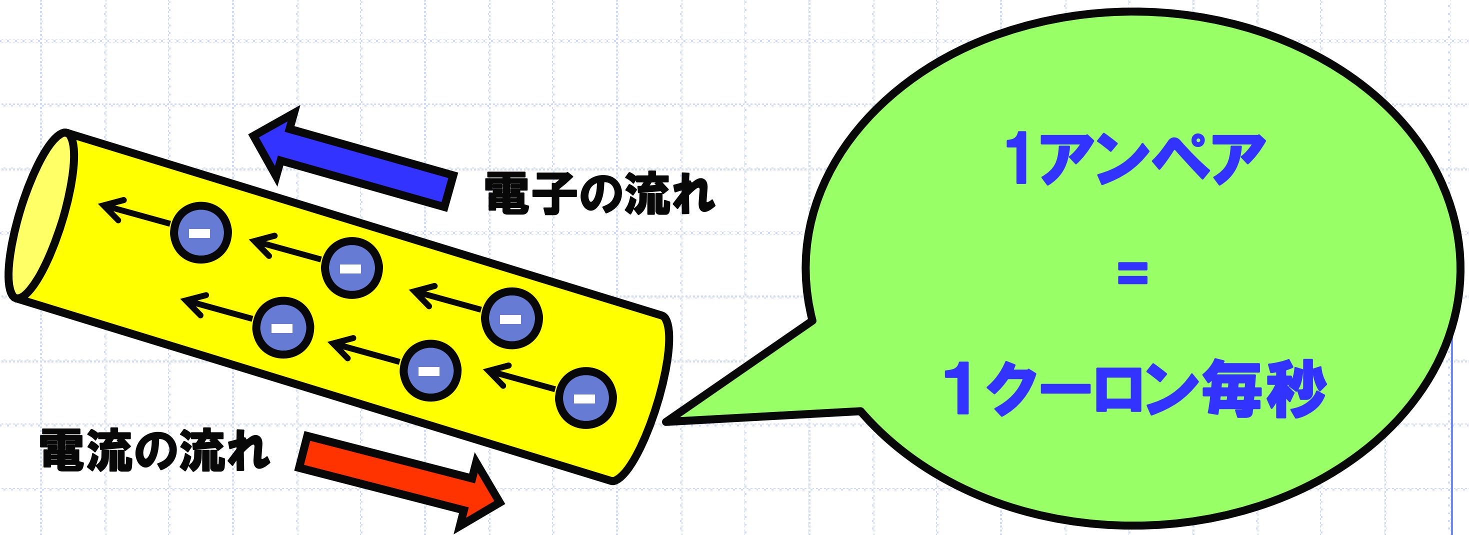
フランス　1736～1806

1785年、クーロンの法則を発見



電荷の単位クーロンとは

電荷の単位のクーロンは，1アンペア(A)の電流が流れている導体の断面を1秒間に流れる電気量として定義されている．



電子が持つ電荷（電気素量）の約6.241506×10^{18}倍

ファラデー定数

ファラデー定数：電子　1 mol 当たりの電荷

$$F = eN_A = 96485C$$

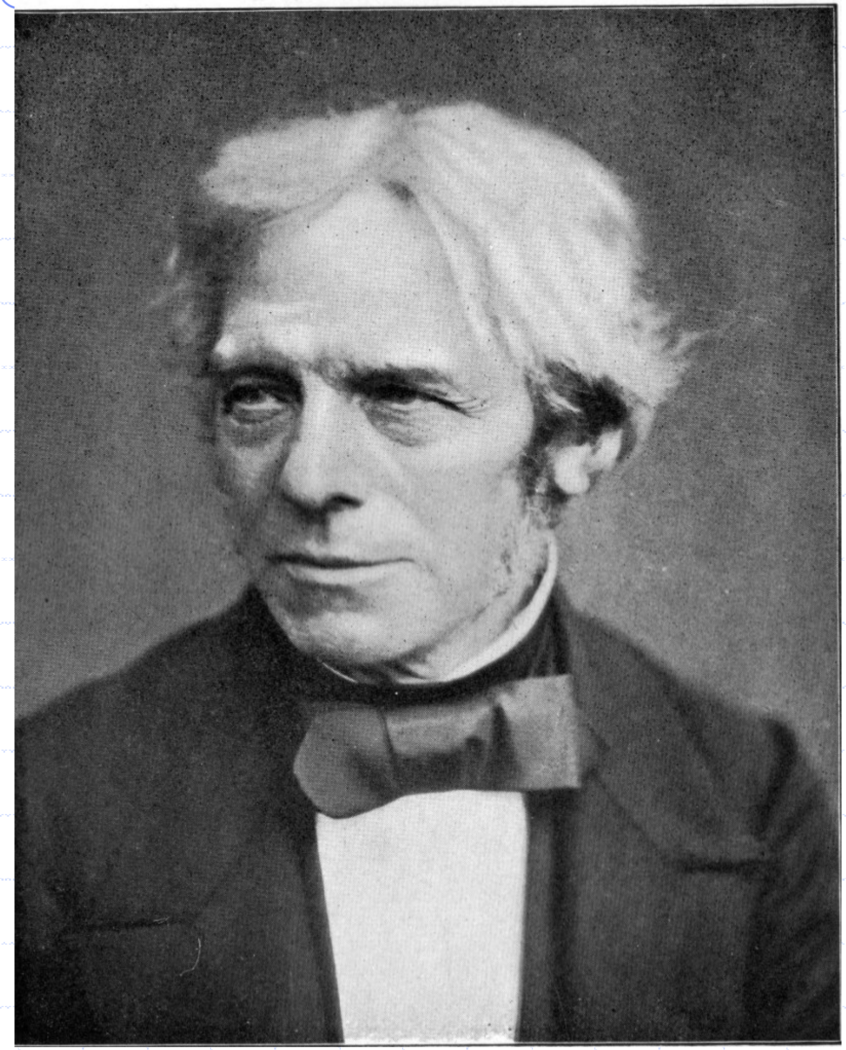
e:電子一個の電荷量

N_A:アボガドロ数
$6.02214179 \times 10^{23}$

1クーロン：電子の電荷の約6.241506×10^{18}倍

1クーロンは，電子の電荷のアボガドロ数倍ではない！

ファラデー



マイケル・ファラデー

（Michael Faraday）

（1791 – 1867）

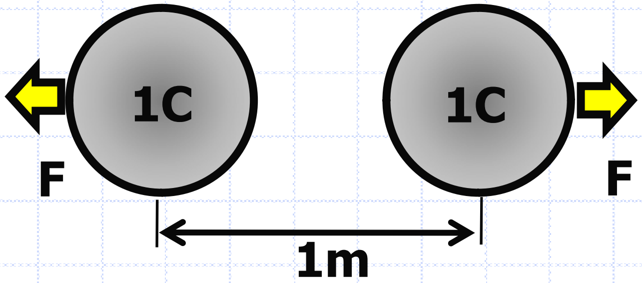
イングランド人

電磁誘導の法則、
反磁性、電気分解
の法則などを発見

例題（クーロンの法則）

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

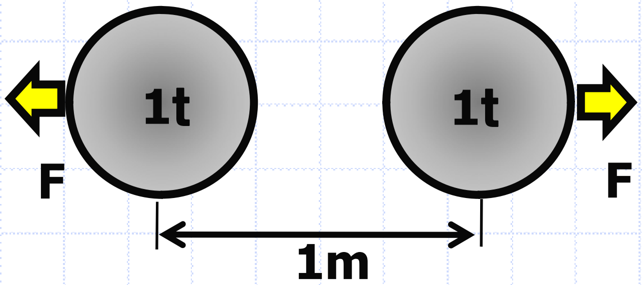
電磁気の場合



$$F = 8.988\times10^9 \times \frac{(1)^2}{(1)^2} \cong 9\times10^9\,N$$

約90万トンの大きさ

重力の場合

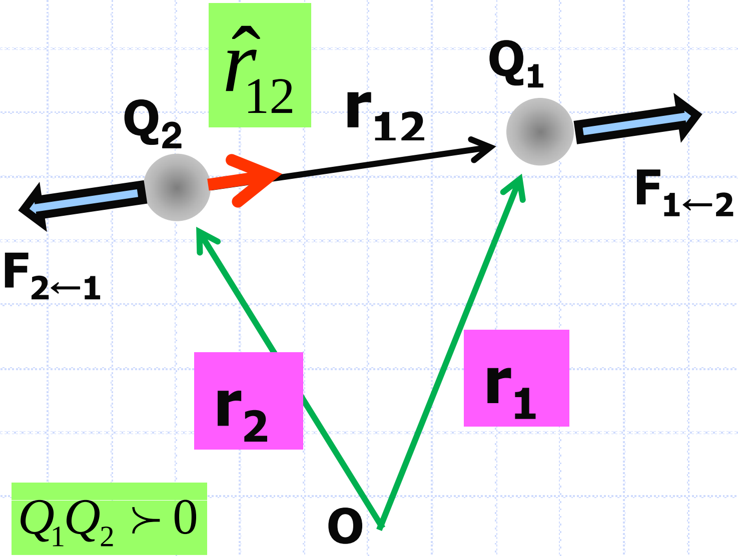


$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.672\times10^{-11}\left[\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\right]$$

$$F = 6.672\times10^{-11} \times \frac{(1000)^2}{(1)^2} \cong 6.7\times10^{-5}\,N$$

約0.007gの大きさ

ベクトル形でのクーロンの法則



$$F_{1\leftarrow 2} = F\hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

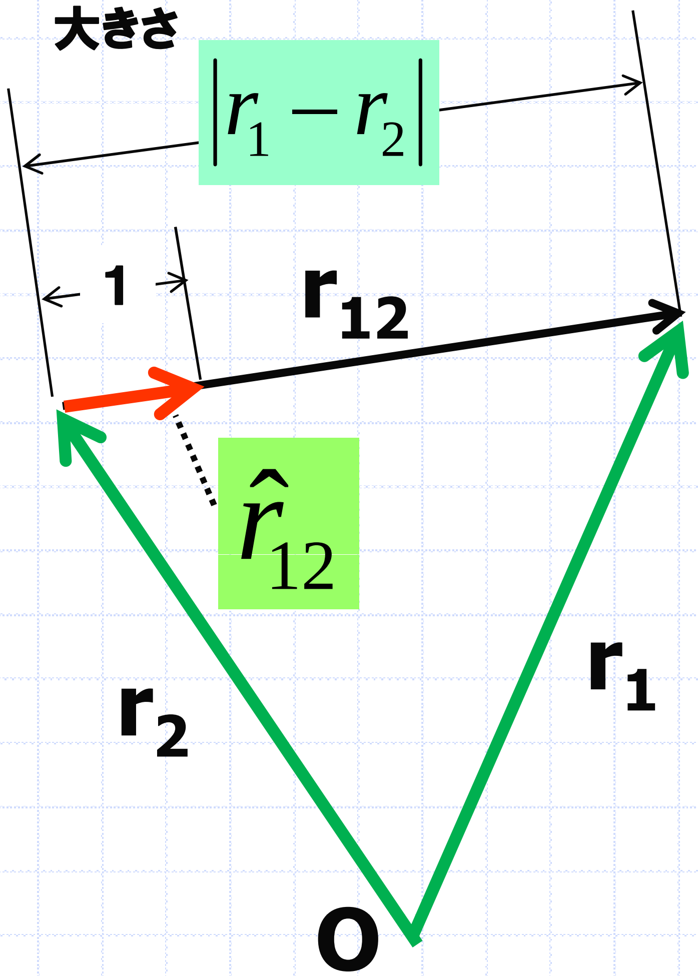
⇩

$$F_{1\leftarrow 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|r_1 - r_2|^2}\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$$

Q_1からQ_2への単位方向ベクトル

$$\hat{r}_{12} = \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$$

単位ベクトルとは



$$r_{12} = r_1 - r_2$$

$|r_1 - r_2|$ r_{12}ベクトルの大きさ

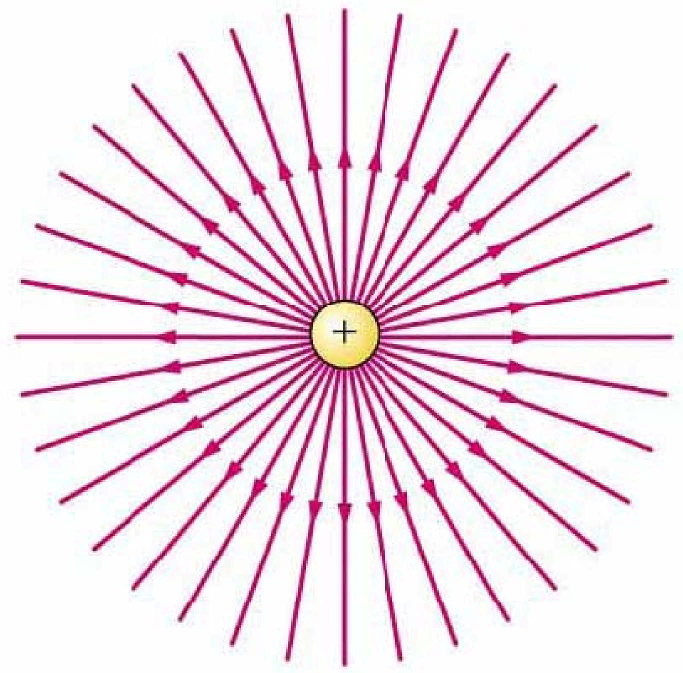
$$\hat{r}_{12} = \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|} = \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$$

$\hat{r}_{12}$ 大きさ1で，r_{12}方向を持つベクトル

⇩

単位ベクトル

電場（1）



電場(Electric field)とは,

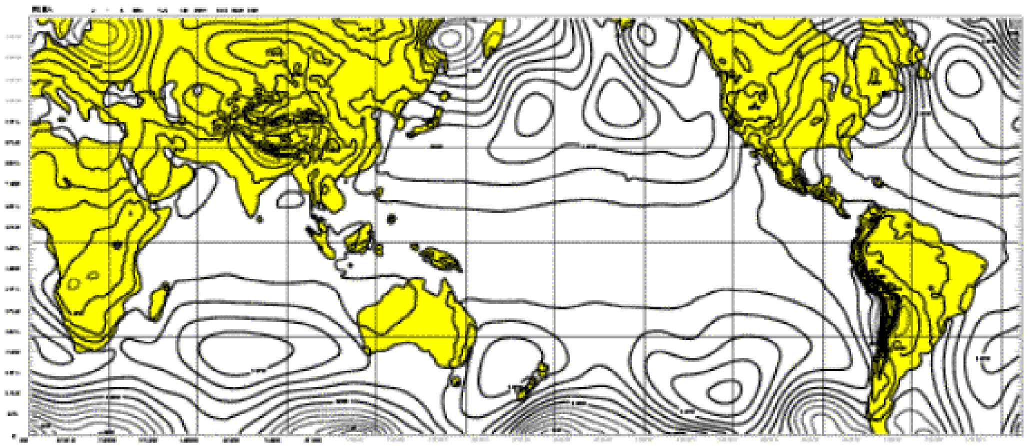
- 電荷がまわりの空間に及ぼす影響の強さ.
- 電荷が電場を作る

電磁気学では重要な概念

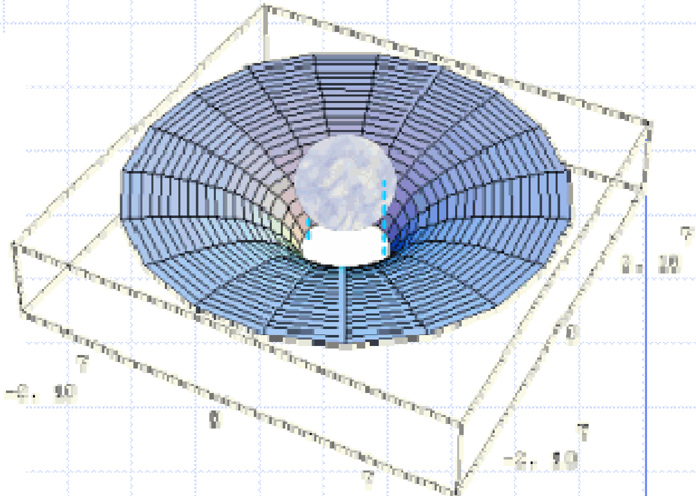
理学系では「電場」，工学系では「電界」という

電場←場とは何か？

- 各点に物理量が指定されている空間をその物理量の場(ば)という
- 温度の場，気圧の場，風の速度の場，重力の場・・

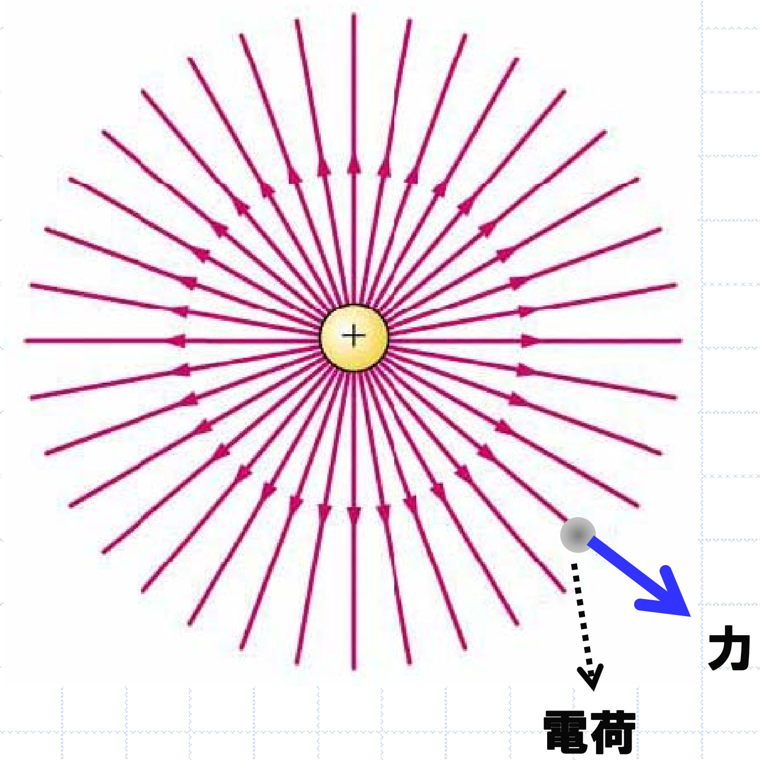


気圧場



重力場

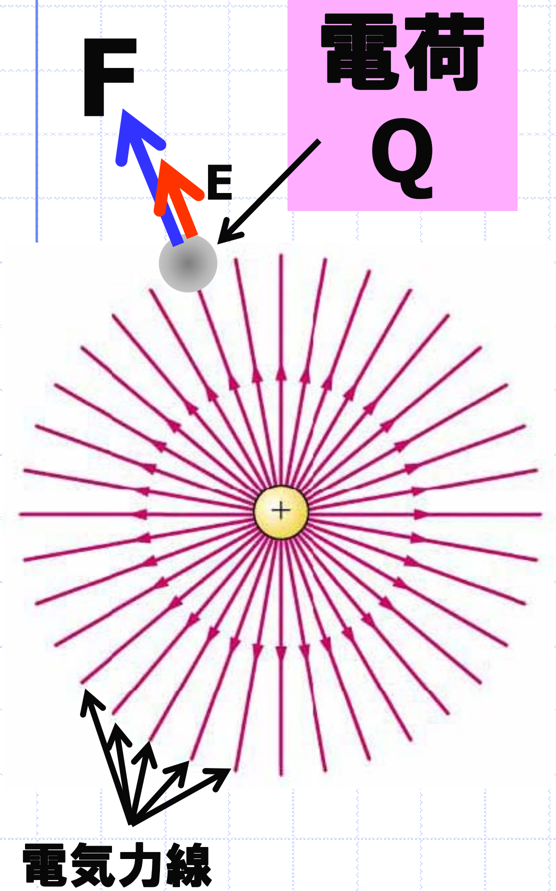
電場(2)



1. 電荷が電場を作る
2. 電場の変化は光速で伝わる
3. 電場は他の電荷に電気力を作用する

理学系では「電場」, 工学系では「電界」という

電場 (3)



空間のある点に, 正の単位電荷量をもつ電荷を置いたとき、その電荷に生じる力を、その点における電場と定義する

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

電荷Qを持ち込んだときに働く力

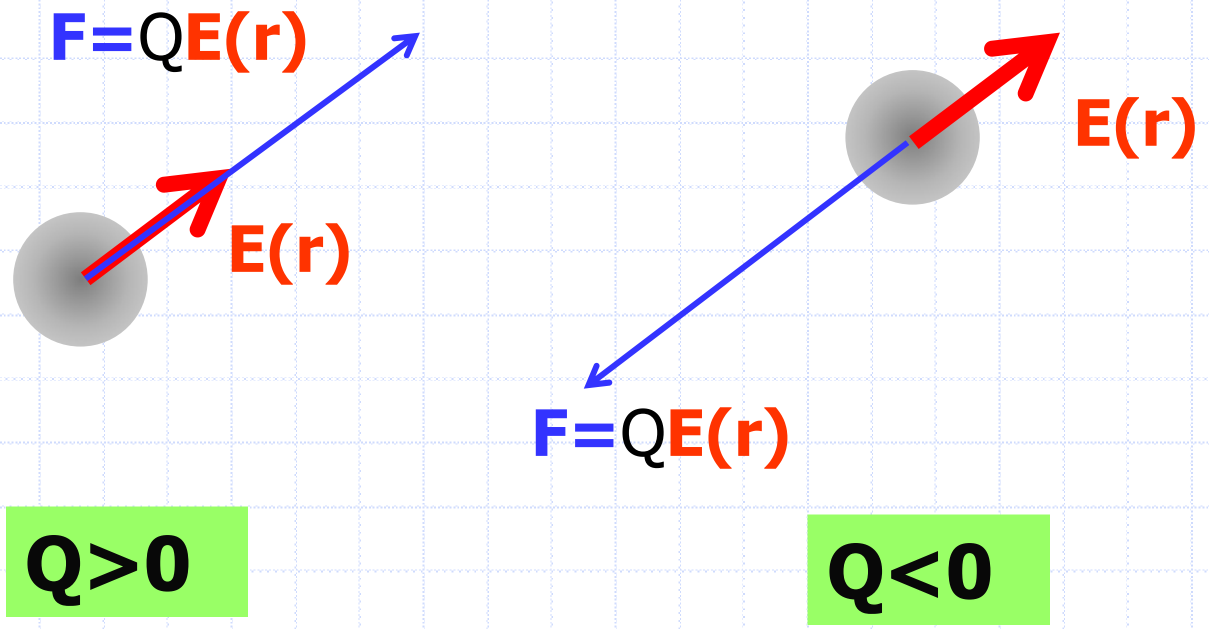
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

単位電荷のときに働く力

電場E:[N/C]

電場 (4)

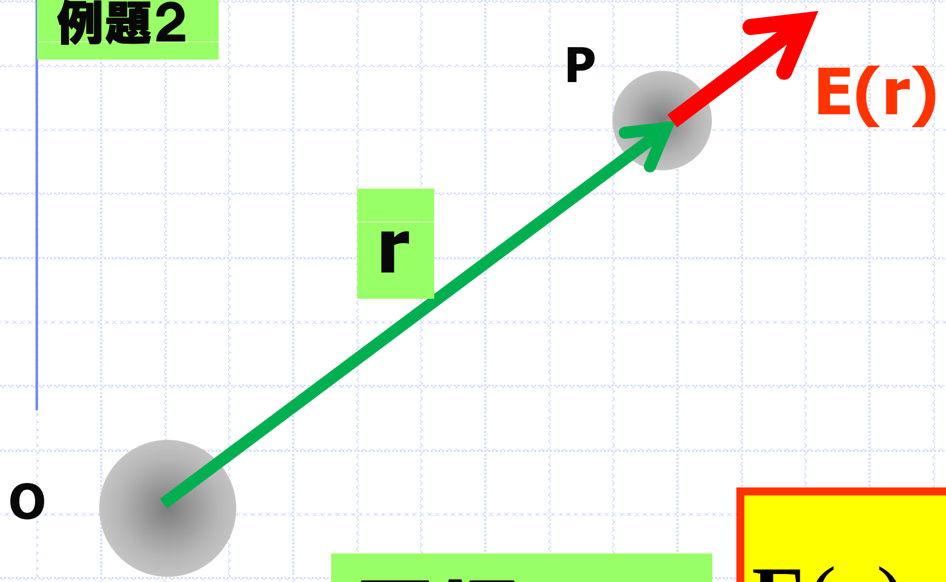
電場により電荷が受ける力



正電荷は電場と同じ向きの電気力を受け，負電荷は電場と逆向きの電気力を受ける

電場 (5)

例題2



原点にある点電荷Qが位置ベクトルrの点Pにつくる電場E(r)は,

電場E(r)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

電場の強さ

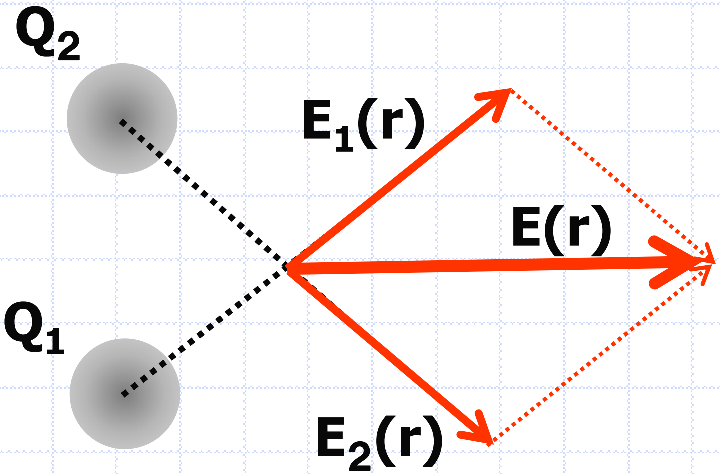
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

電場の重ね合わせの原理

電荷Q_1だけが有るときの電場を$E_1(r)$,

電荷Q_2だけが有るときの電場を$E_2(r)$,

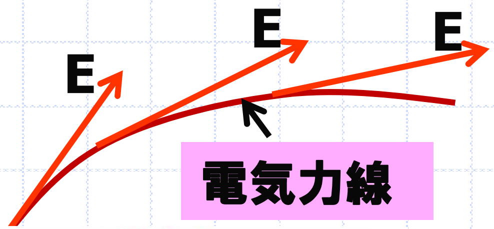
とすると点電荷がある時の電場は，**重ね合わせの原理**により次のようになる

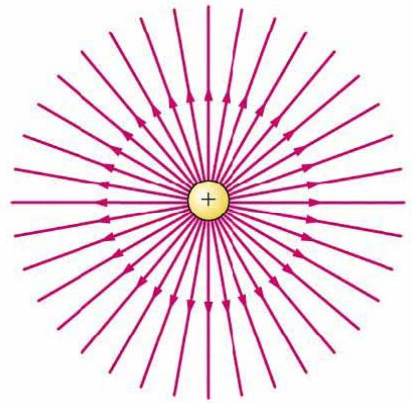


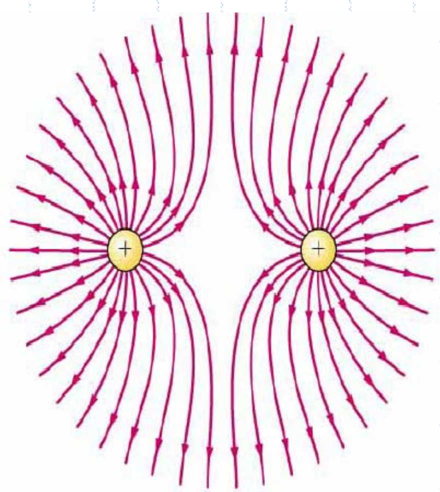
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

ベクトル加算

電気力線(1)

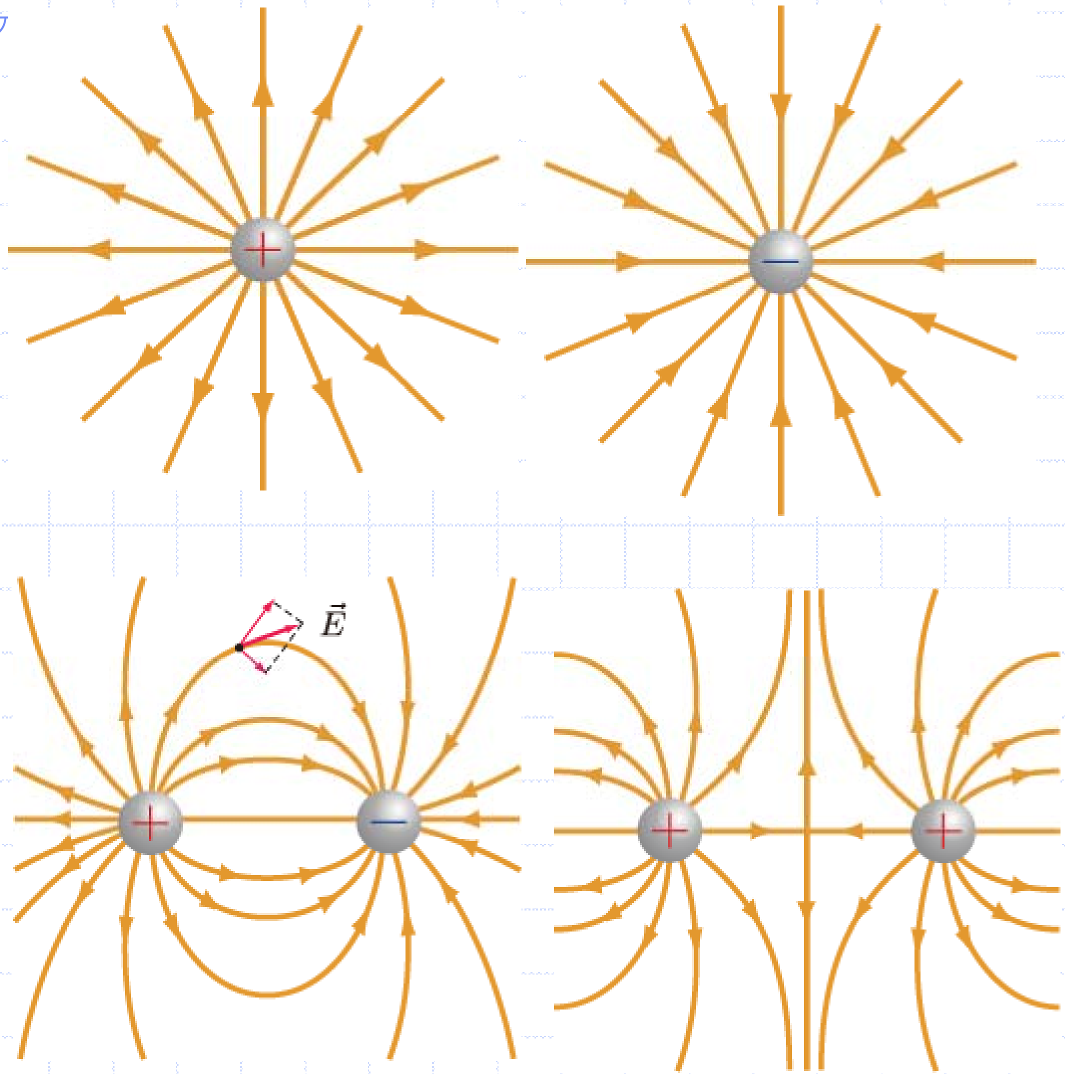






電気力線:空間の各点に, その点の電場を表す矢印を描き, 線上の各点で電場を表すベクトルの矢印が接線になるような向きのある曲線を描く

電気力線の描き方



① 正電荷から放射(出る)，負電荷に吸引(引き込む)

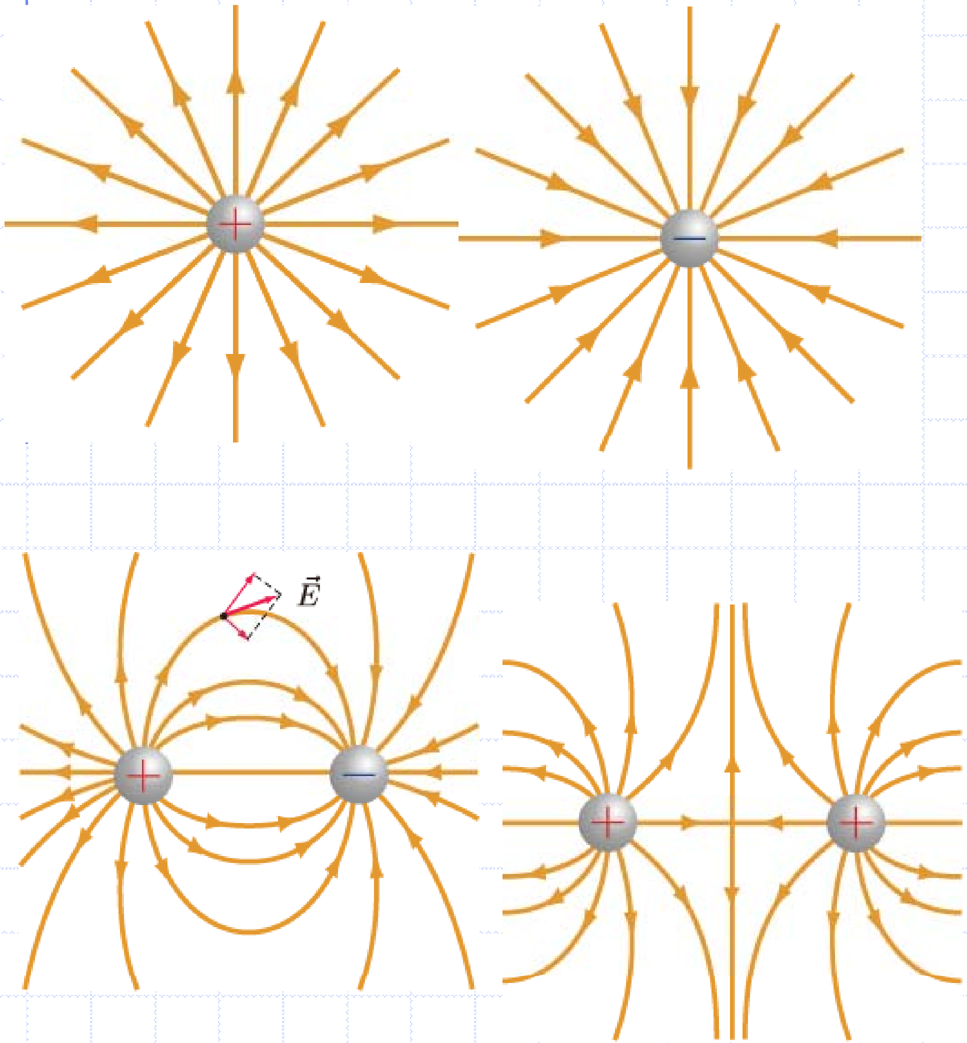
② 電場の方向に沿うこと

③ 電気力線の密度は電場の強さに比例（電場Eでは E本／m²の密度で電気力線が存在する）

④ 2本の電気力線は交わることがない。

仮に，10[V/m]の電場なら、この電場に垂直な平面を通過する電気力線は1[m ²]につき10本となる

電気力線(2)



電気力線のイメージ

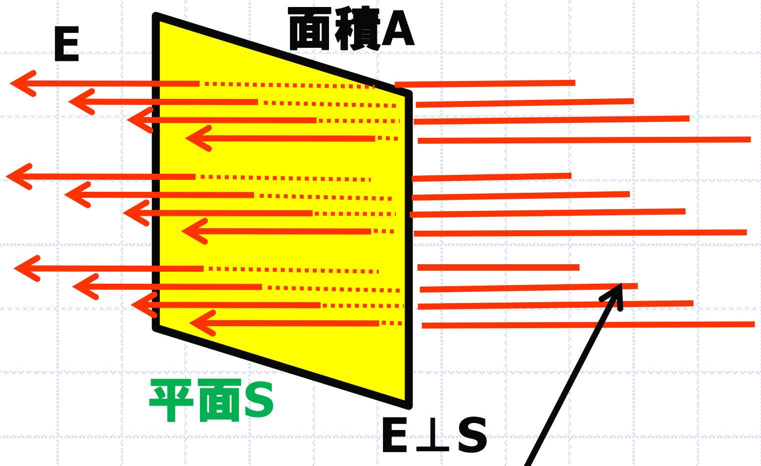
流体に例えると,

- ＋電荷は湧き出し口
- − 電荷は吸い込み口
- 電気力線は流線

に相当する

電気力線束(1)

（電場Eでは E本／m²の密度で
電気力線が存在する）



一様な電場Eの中に，電場に垂直な面積Aの平面がある場合，Φ_Eを平面Sを貫く**電気力線束**という

一様な電場E

$$\Phi_E = EA$$

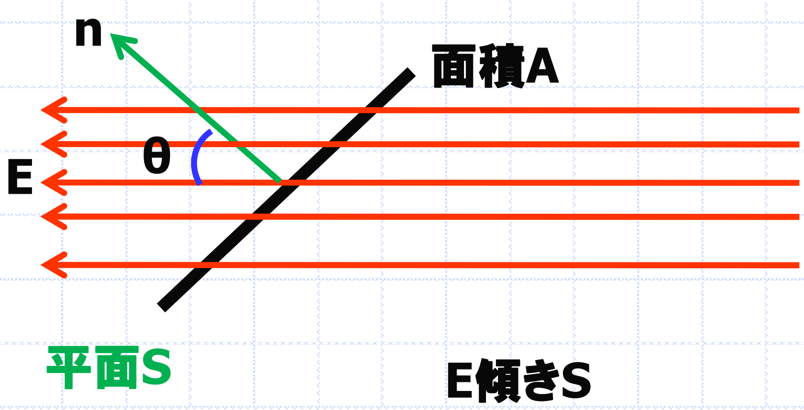
E:一様な電場

A:電場に垂直な断面積

要するに平面Sを通る**電気力線の本数**のこと

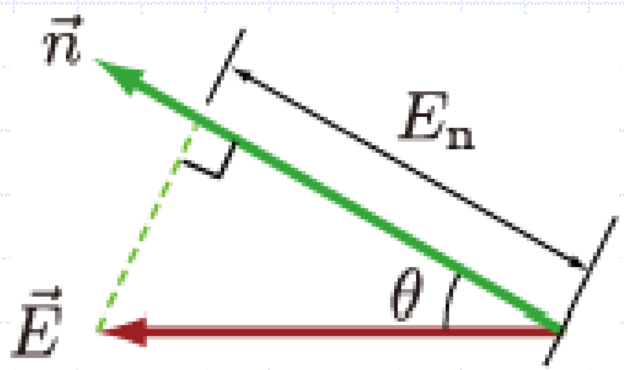
電気力線束(2)

（電場Eでは E本／m²の密度で電気力線が存在する）



平面Sと電場Eが垂直でない場合

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$

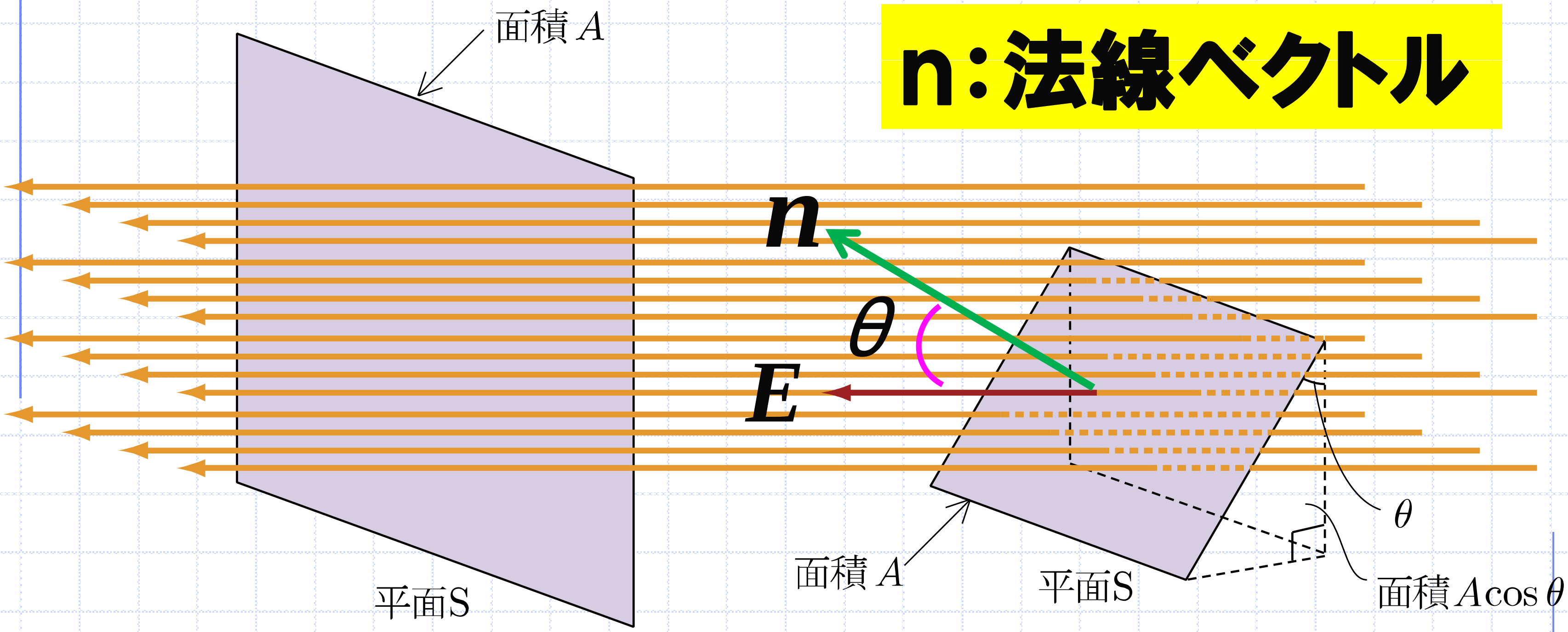


$E_n = E\cos\theta$を電場Eの法線方向とすると

$$\Phi_E = E_n A$$

平面Sを貫く電場Eの法線方向成分として定義される

電気力線束 (3)



n:法線ベクトル

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$

ガウス

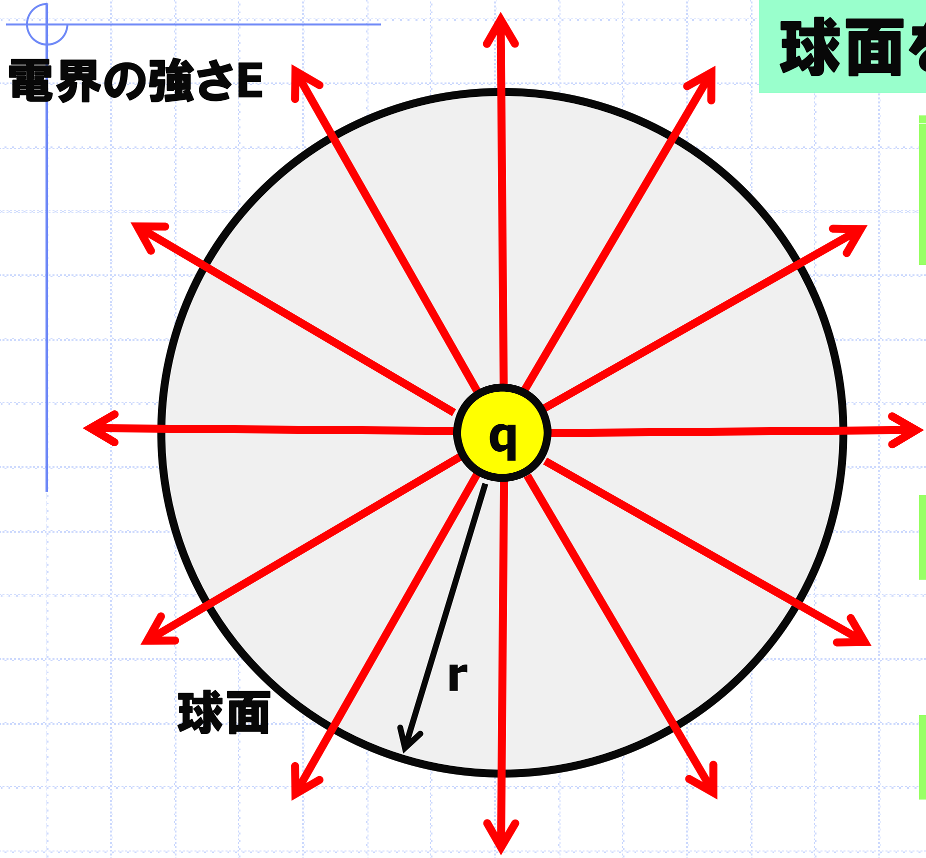
ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス

（1777 – 1855）

ドイツの数学者、天文学者、物理学者

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ガウスの法則（1）



球面を貫く電気力線束Φ_Eを求める

1）点電荷q[C]の場合，半径r[m]
の球面上の電界の強さは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

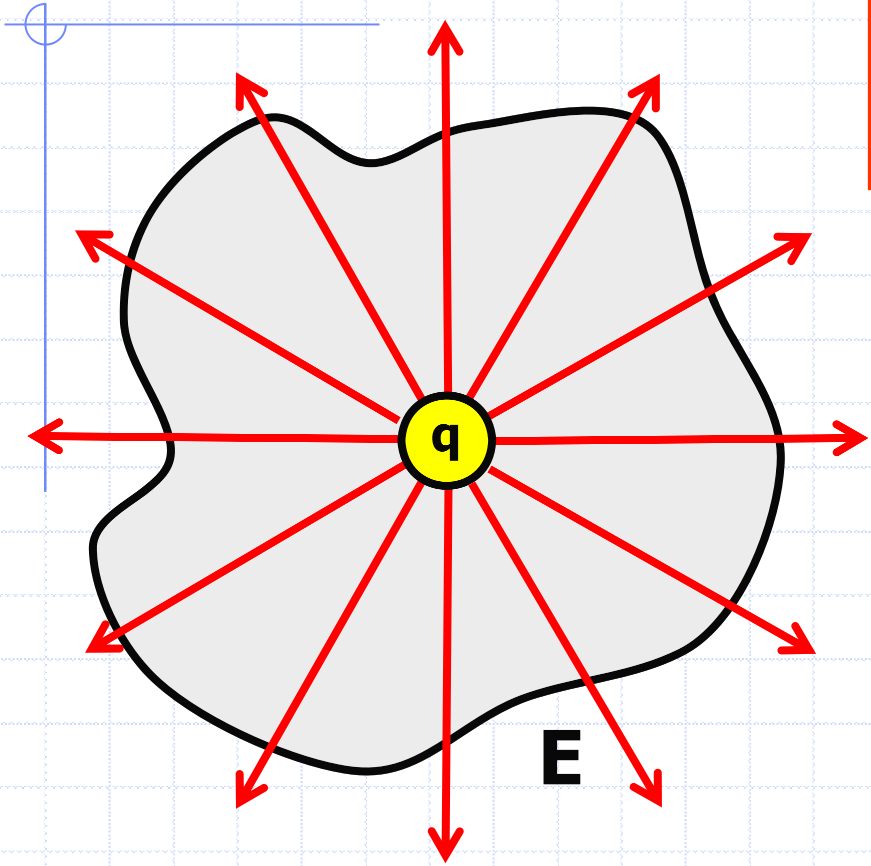
2）半径rの球面の面積をAとすると

$$A = 4\pi r^2$$

3）すると**電気力線束Φ_E**は，

$$\Phi_E = E \cdot A \Rightarrow \Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ガウスの法則 (2)



任意の閉曲面

球でなくとも，曲面を貫く電気力線の数は同じ

閉曲面Sの内部から外へ出てくる正味の電気力線束Φ_E

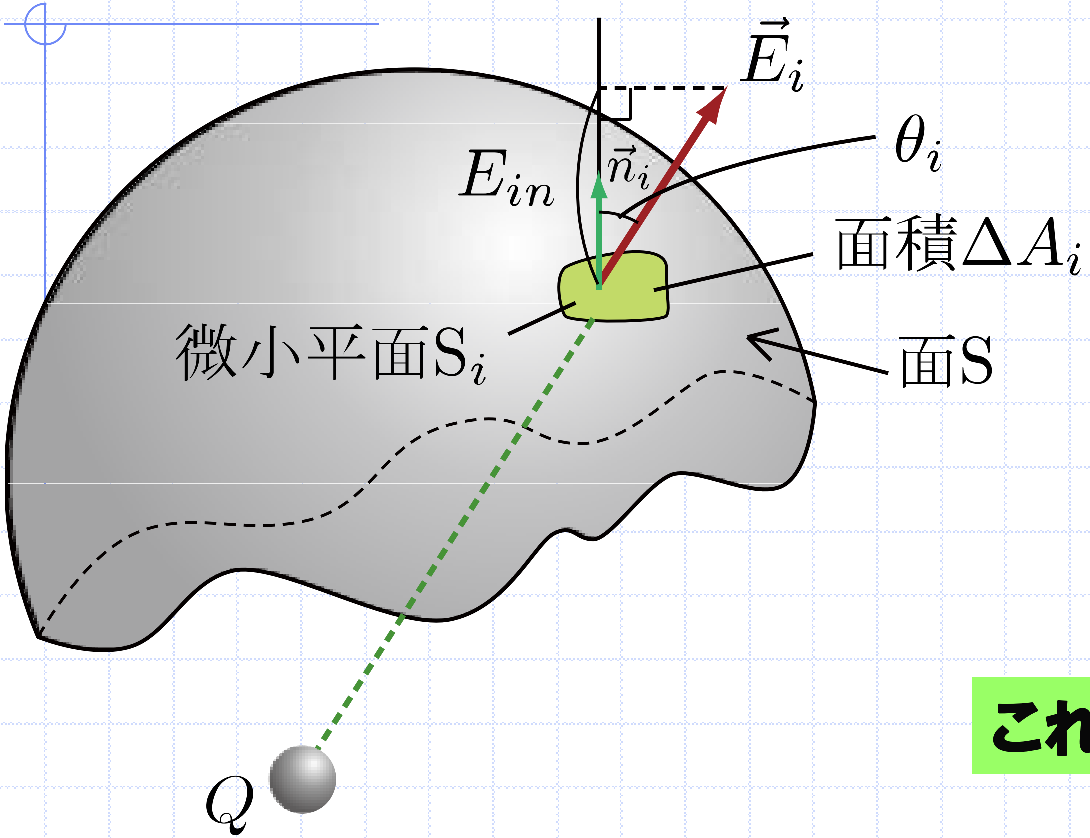
=

閉曲面S内部の全電気量

Q_{in}/ε_0

$$\Phi_E = \iint_S E_n dA = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

ガウスの法則 (3)



$$\boxed{\Phi_E = \iint_S E_n dA}$$

二重積分の意味は？

面積ΔA_iを貫く電気力線の本数は

$$E_{in}\Delta A_i$$

これを面S全体で求めると

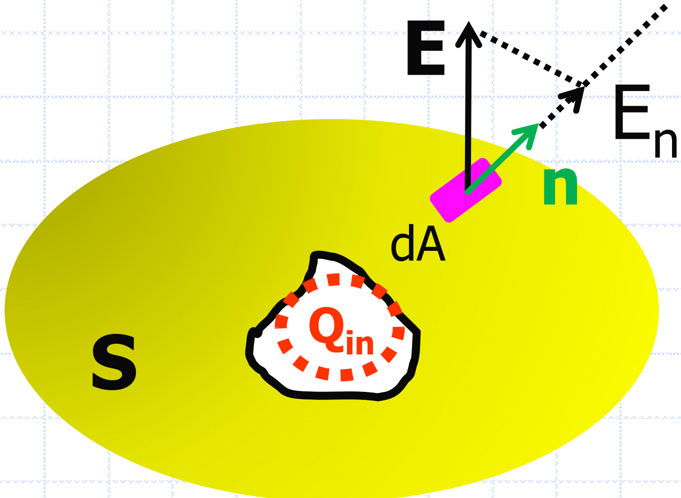
$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \to 0, N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} E_{in}\Delta A_i \boxed{= \iint_S E_n dA}$$

ガウスの法則 (4)

閉曲面Sの内部から外へ出てくる正味の電気力線束Φ_E

=

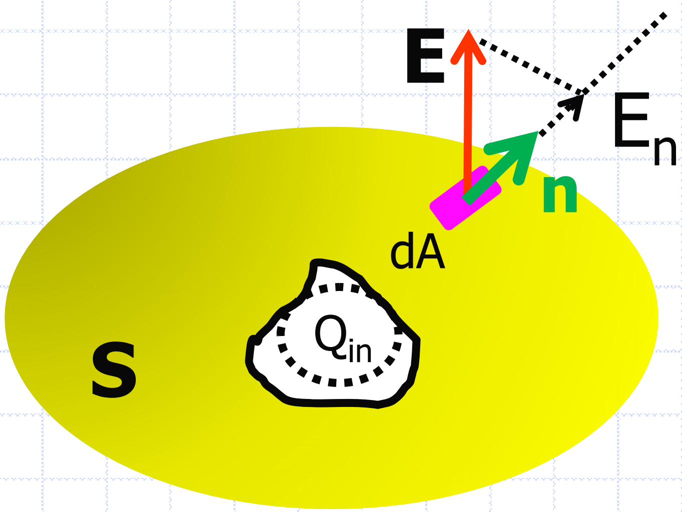
閉曲面S内部の全電気量Q_{in}/ε_0



$$\iint_S E_n dA = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

ガウスの法則まとめ

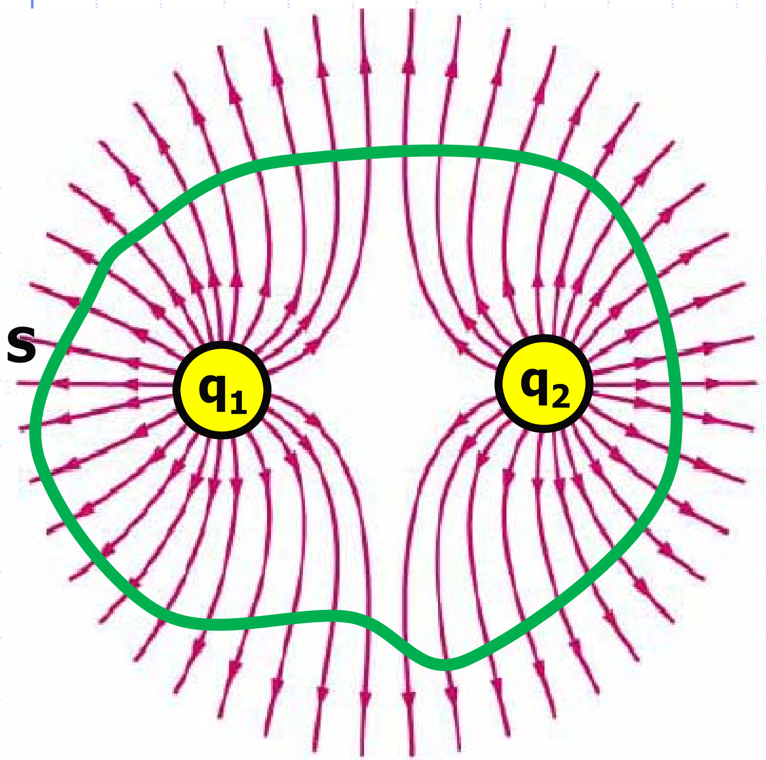
$$\iint_S E_n dA = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$



電荷量Qの電荷はQ/ε_0本の電気力線を発生する

閉曲面上で積分するとQ/ε_0となる

ガウスの法則 (5)



任意の閉局面Sの中にn個の点電荷q_1, q_2, ・・・, q_nがあり, それぞれの電荷から電気力線が出ている

この閉局面S内の全電荷q_{all}は

$q_{all} = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ [C]

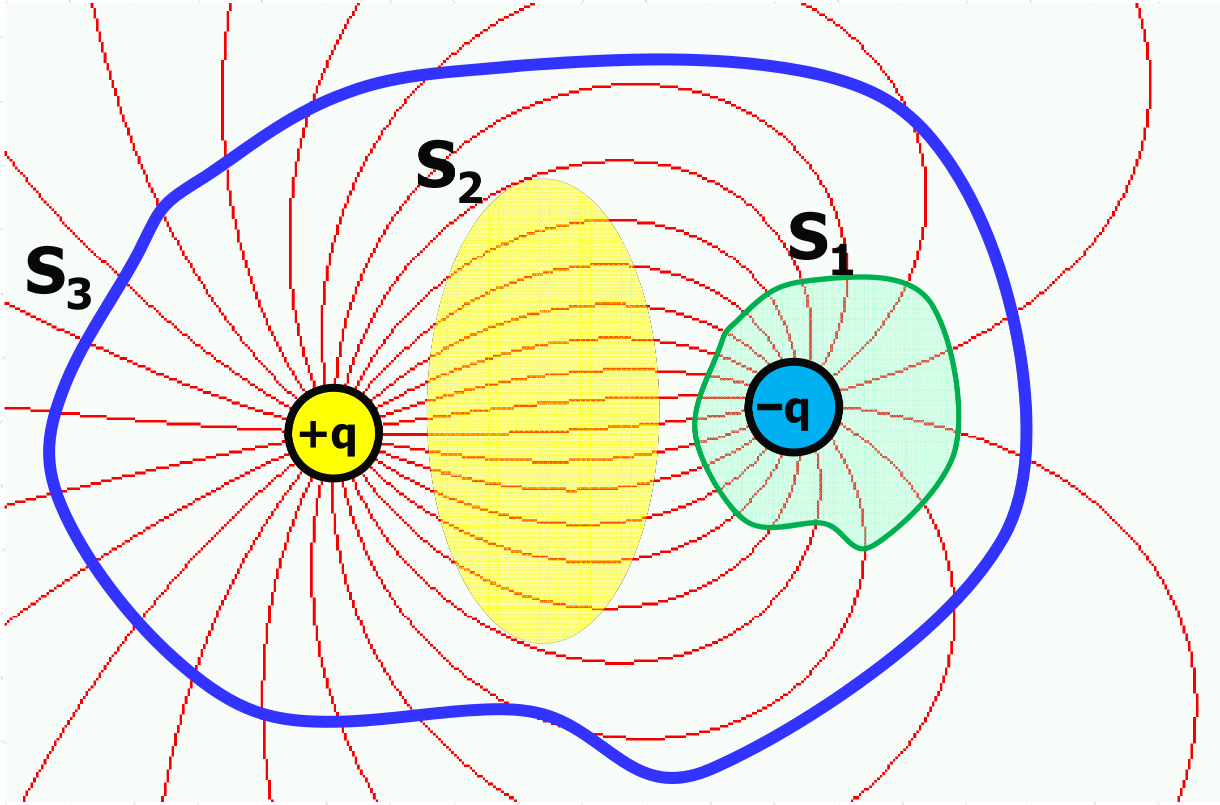
この時, この閉曲面Sからの電気力線の本数は

$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

電荷量Qの電荷は, Q/ε_0の電気力線を発生する

ガウスの法則 (6)

例）



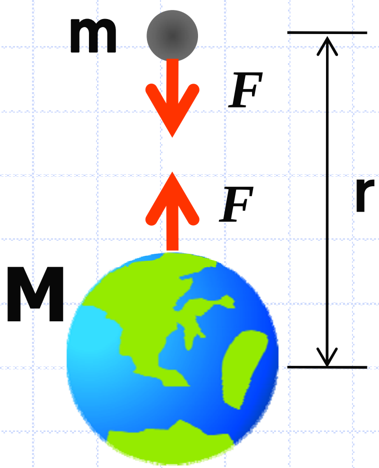
S_3閉曲面：0

S_2閉曲面：0

S_1閉曲面：$-q/\varepsilon_0$

ガウスの法則ふろく

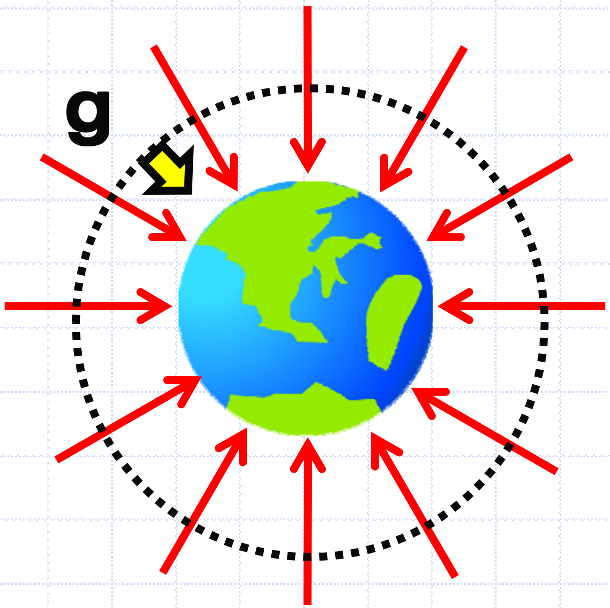
$$F = G\frac{mM}{r^2}$$



$$F = mg \quad \left(g = G\frac{M}{r^2} \right)$$

万有引力の法則

g:重力加速度



半径rの球面上の重力加速度gの積分値は

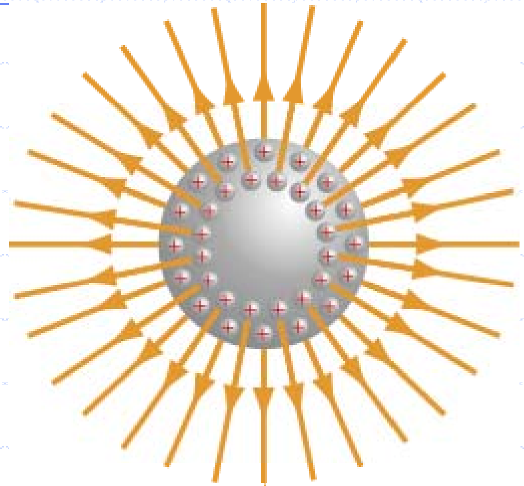
$$\iint_S g dA = G\frac{M}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi GM$$

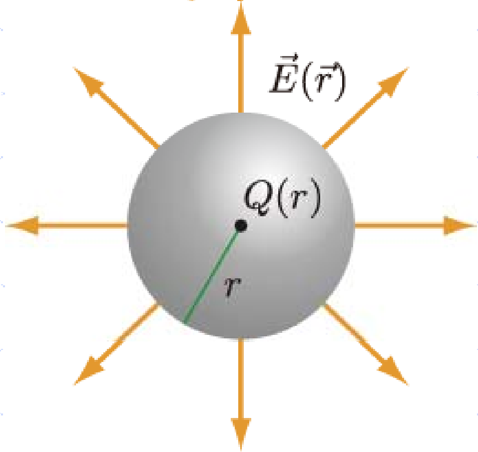
閉じた曲面上での加速度の積分は
その曲面内部の全質量に比例する

ためしに $G = \dfrac{1}{4\pi\gamma}$ と置くと

$$\iint_S g dA = \frac{M}{\gamma}$$

ガウスの法則の応用





例1：電荷分布が球対称な場合

- 球面上で電場の強さ一定で面に垂直なためE_n=E(r)
- 球面の面積は4πr²
- 球面内部の全電気量をQ(r)とすると

$$\Phi_E = E_n \cdot A = \mathrm{E(r)} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

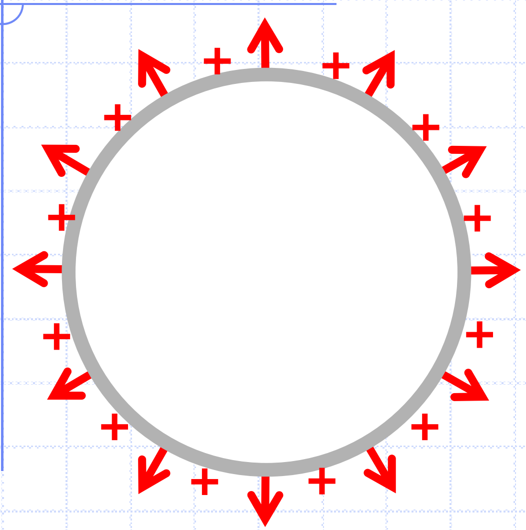
⇩

$$\mathrm{E(r)} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

電荷量Qの電荷は，Q/ε_0の電気力線を発生する

原点を中心とする半径rの球面内にある全電荷Q(r)が原点にあるとした場合の電場に等しい．

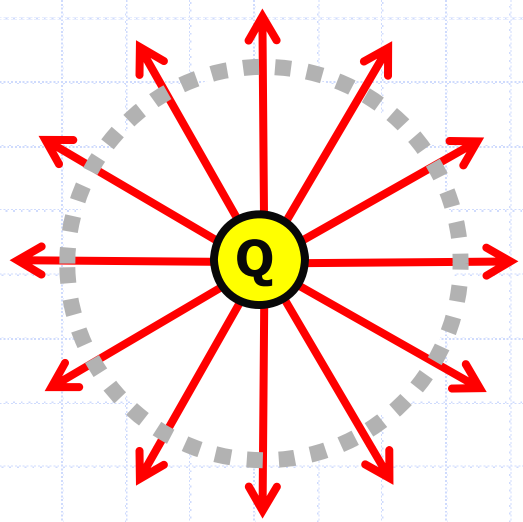
例4



半径rの球面上に電荷が一様に分布している場合

$$Q(r)=\begin{cases}0 & r \prec R \\ Q & r \geq R\end{cases}$$

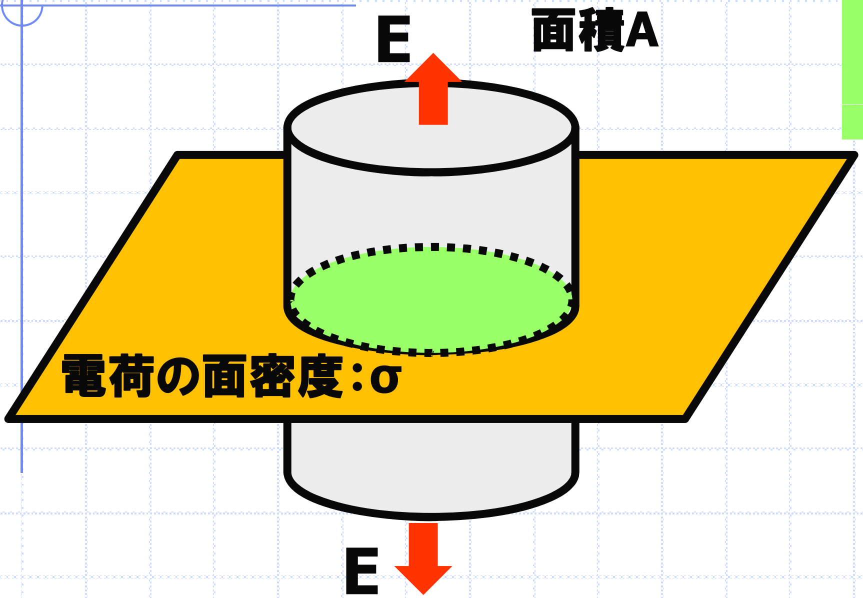
回答



$$E(r)=\begin{cases}0 & r \prec R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \geq R\end{cases}$$

外部電場は中心にQがある場合と等価

応用例

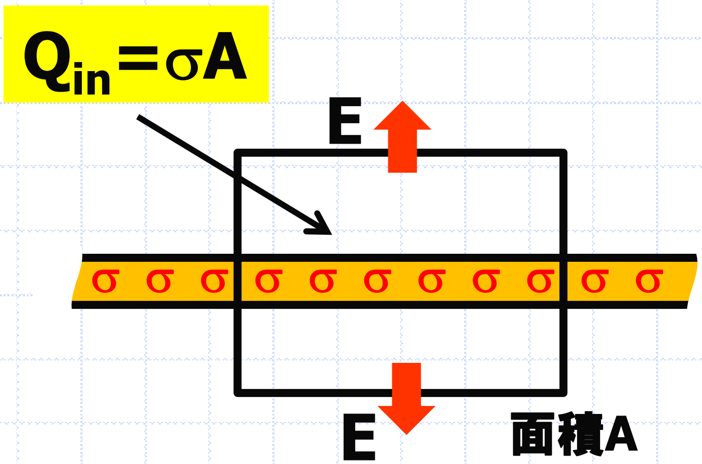


無限に広くて薄い絶縁体の板に電荷が一様に分布している場合

円筒内電荷:$Q_{in}=\sigma A$

電気力線:Q_{in}/ε_0本

円筒の上下から出て行く電気力線の本数は等しい



$$E=\frac{Q_{in}}{2\varepsilon_0 A}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例題1（1）

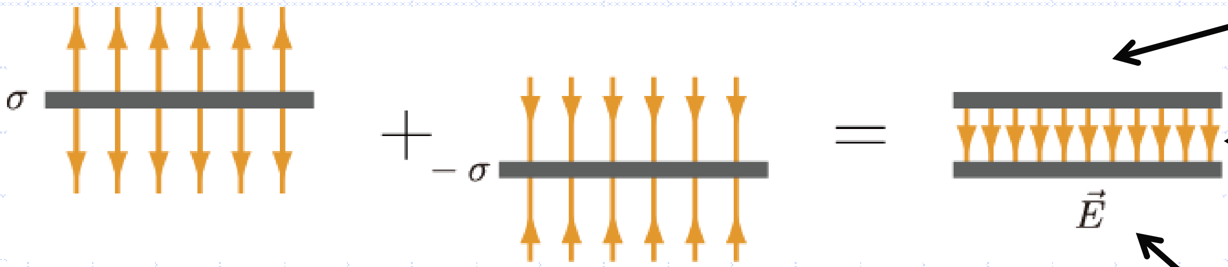
Q1:2枚の無限に広い平らな薄い板がそれぞれ面密度σと−σで一様に帯電している．このときの電場Eを求めよ．

電場Eは重ね合わせの原理より

$$E = E_1 + E_2$$

電場E1,E2は前例題より下図のようになる

よって回答は



$$E = 0$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

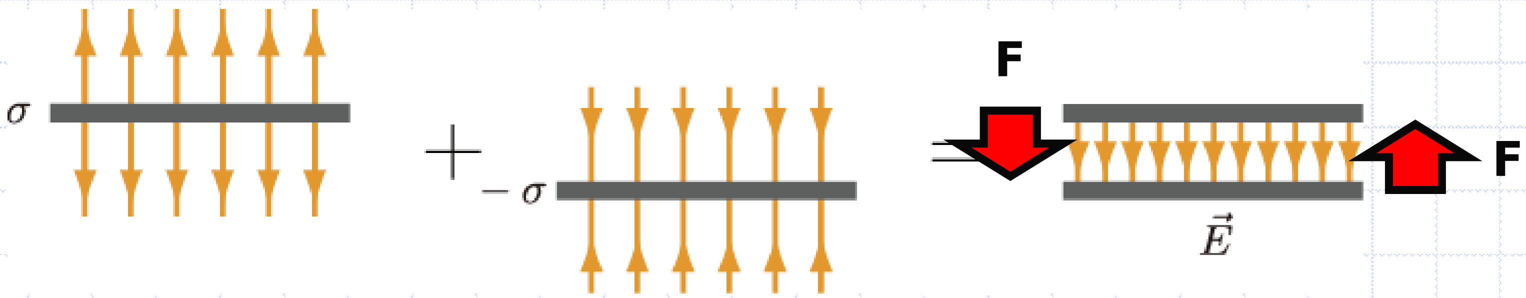
$$E_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例題1（2）

Q2:1つの板の上の単位電荷上の電荷がもう一つの板の電荷から受ける電気力を求めよ

上板 $F=\sigma E_2=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

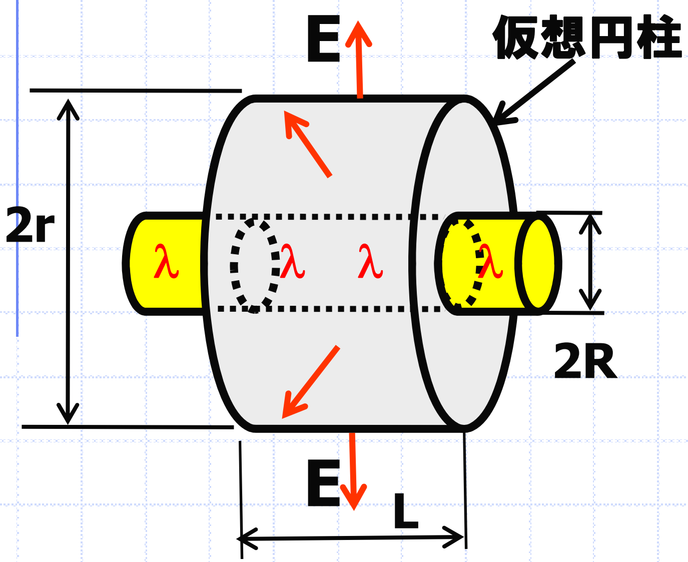
下板 $F=\sigma E_1=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$



$$E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E_2=\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例題



単位長さ当たりの電荷:λ

無限に長い円柱に電荷が一様に分布している場合

円柱内電荷:$Q_{in}=\lambda L$

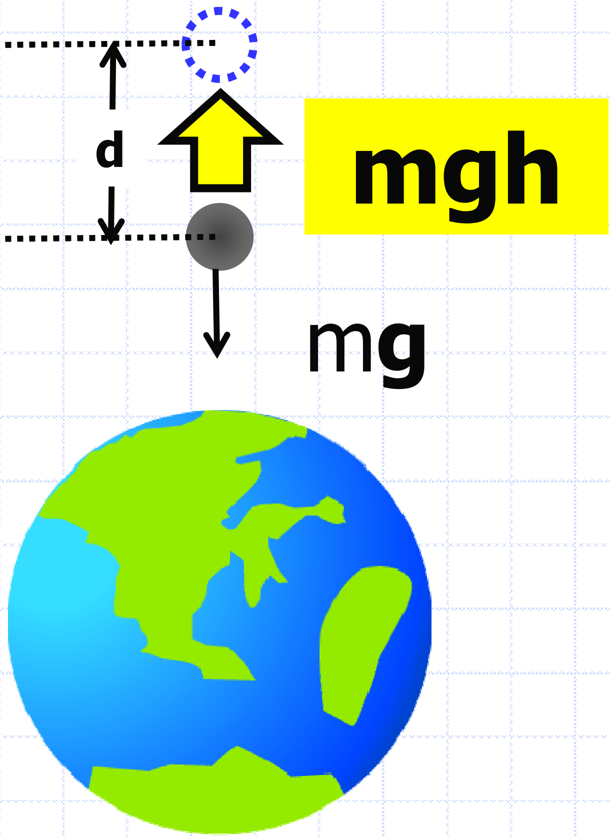
電気力線:Q_{in}/ε_0本

円筒側面積:$2\pi rL$

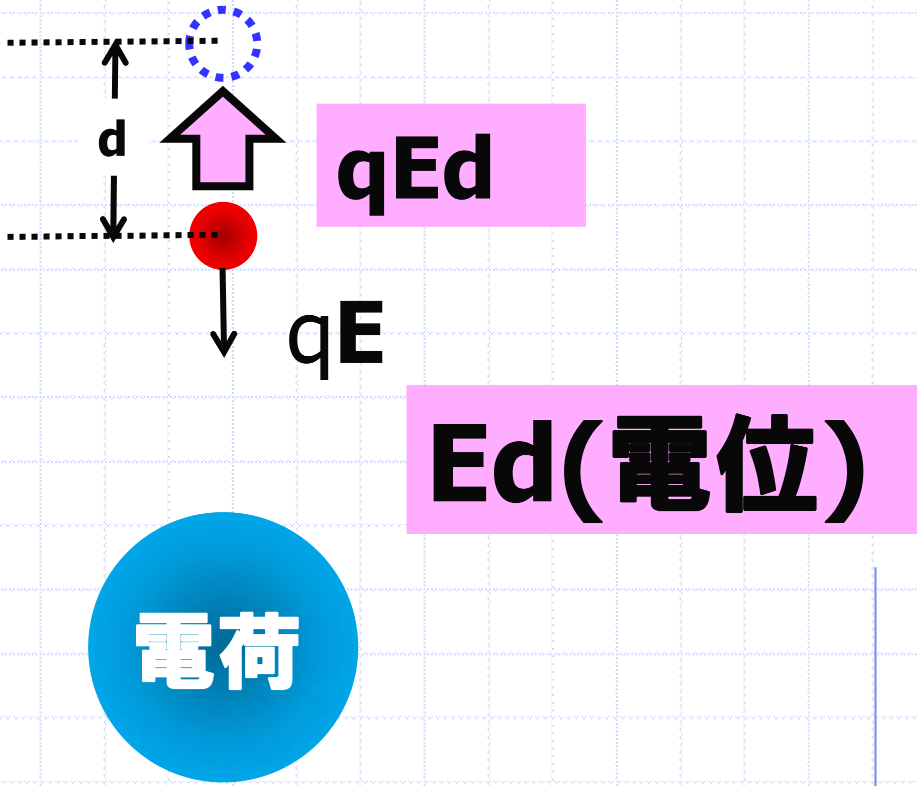
$$E(r)=\frac{\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}}{2\pi rL}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

電位

電位を重力とのアナロジーで想像する

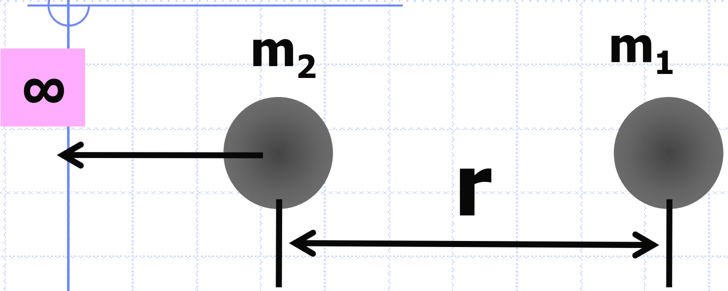


$$G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

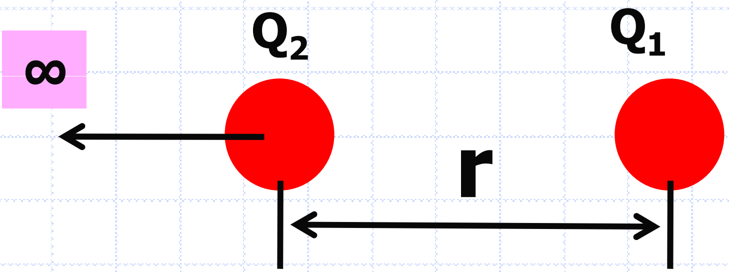
クーロンポテンシャル



万有引力による位置エネルギー

$$F(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$U^{\text{万有}}(r) = -\int_r^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$



クーロン力による位置エネルギー

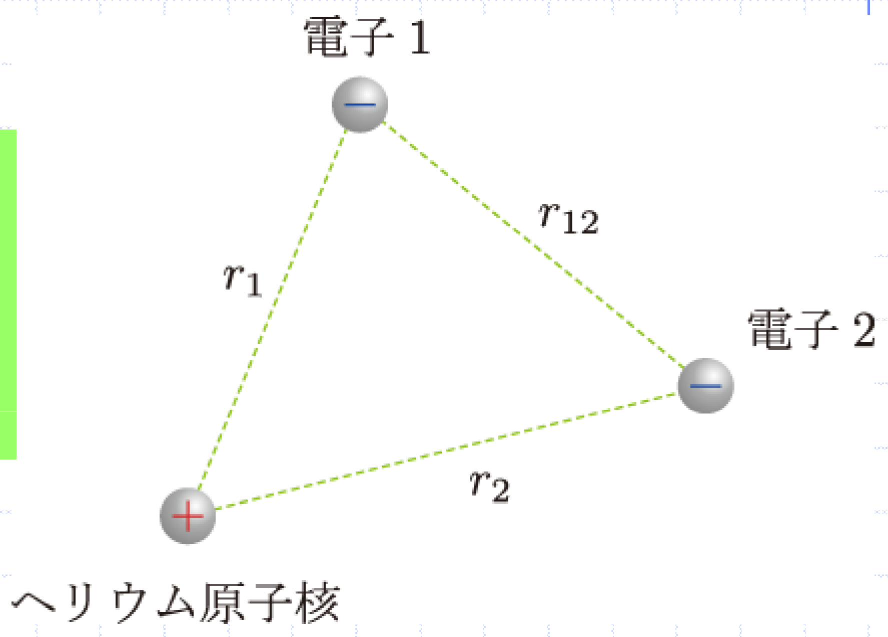
$$F(r) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{U(r) = \int_r^\infty \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

クーロン・ポテンシャル　または　クーロン・エネルギーと呼ばれる位置エネルギー

例5

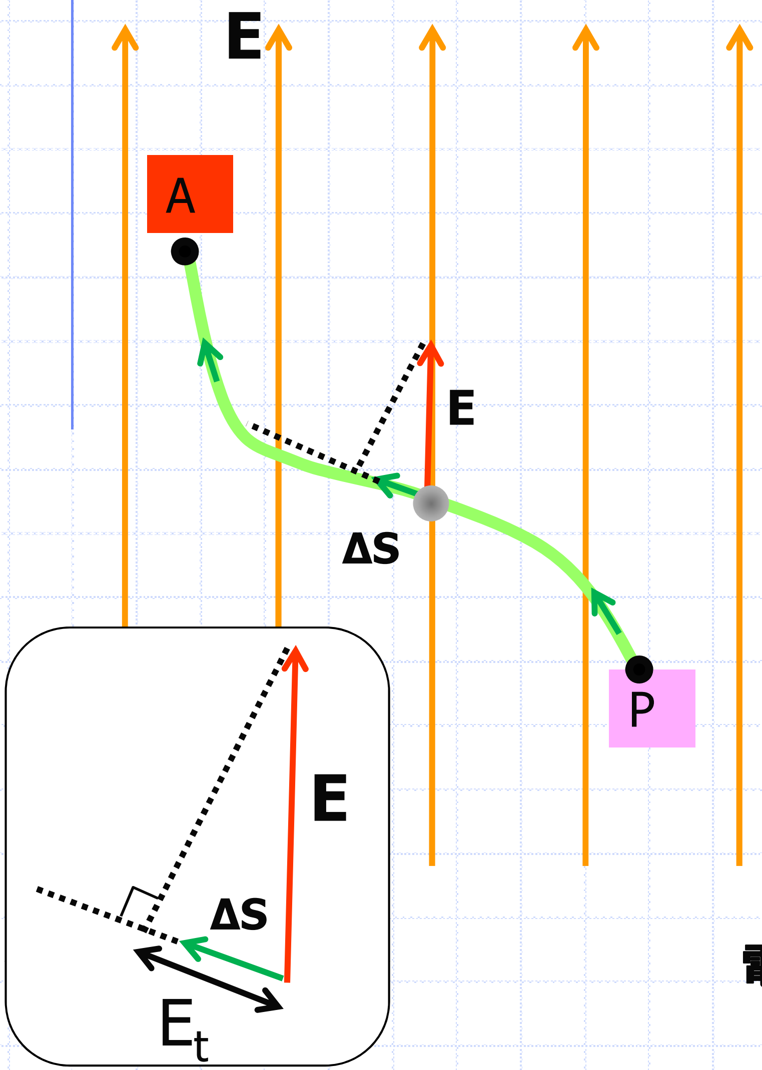
ヘリウム原子は電荷が2eの原子核と電荷が-eの2個の電子から構成される．その位置エネルギーを求める



$$U(r) = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

電子1と原子核　**電子2と原子核**　**電子1と電子2**

電位（1）



電荷Qが点Pから点Aまで移動するときに，電気力F=QEが行う仕事$W_{P\to A}$は，位置エネルギーU_P, U_Aの差に等しい

$$W_{P\to A} = \int_P^A QE_t ds = U_P - U_A$$

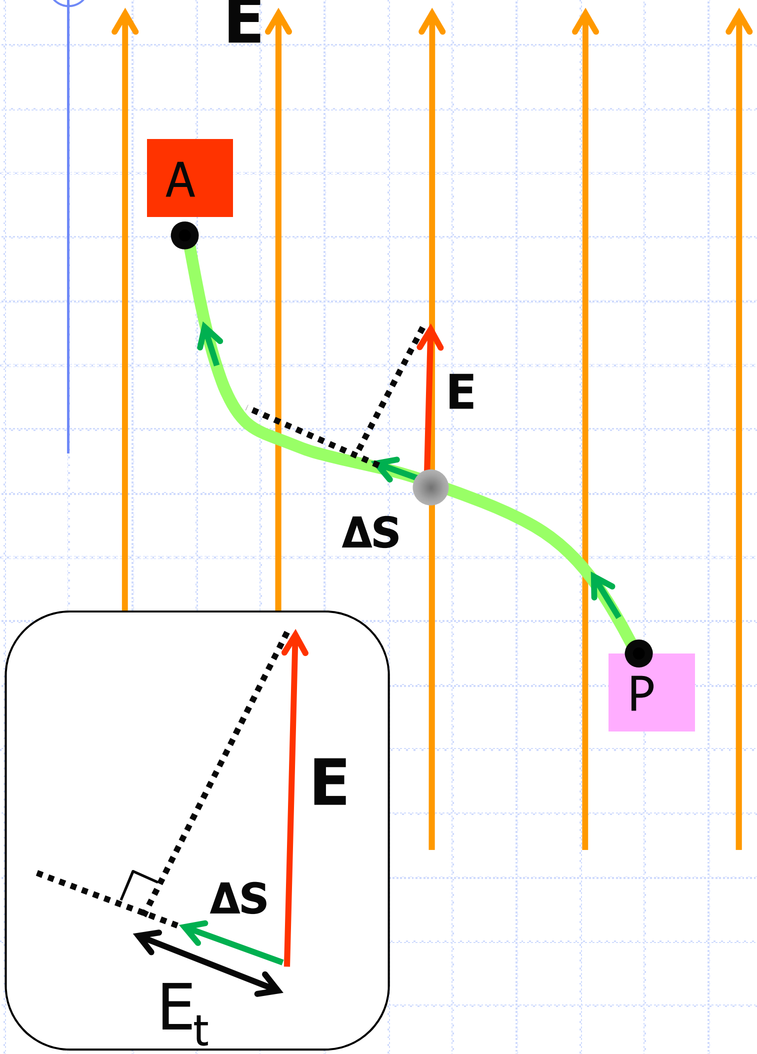
単位正電荷あたりの位置エネルギーを電位とよぶ

$$V = \frac{U}{Q} \quad [J/C]$$

電位の単位V（ボルト） $\boxed{[V] = [J/C]}$

電位(2)

$$V = \frac{U}{Q} \quad [J/C]$$



2点P,Aの電位→電位差

$$\int_P^A E_t ds = V_P - V_A$$

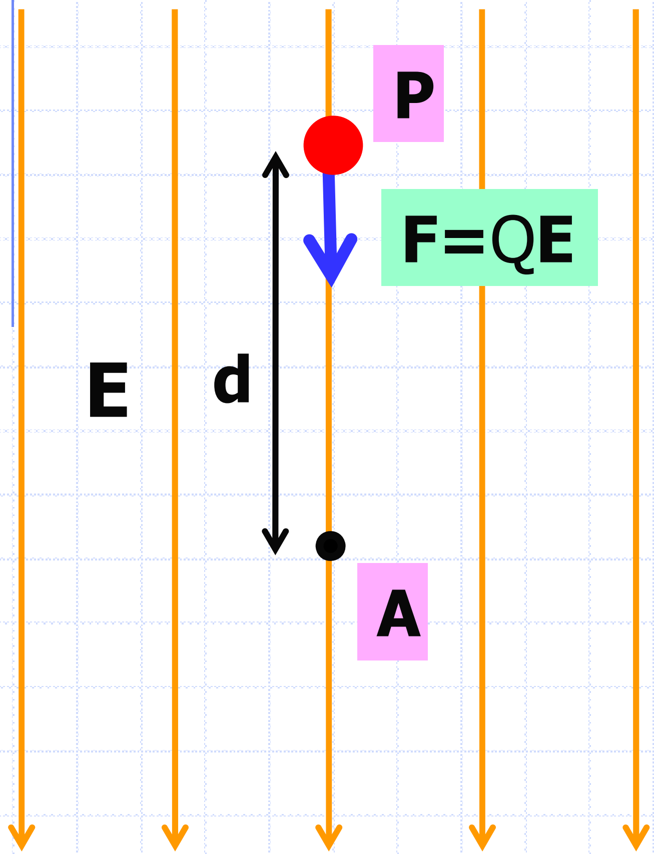
電位差Vの間を電荷Qが移動する場合に行う仕事

$$W_{P\to A} = QV = Q\left(V_P - V_A\right)$$

電位(3)

例題6

一様な電場Eの中を点Pから点Aまで電荷Qが移動する. $W_{P\to A}$を求める



$$W_{P\to A} = QEd = Q(V_P - V_A)$$

$$\therefore V_P - V_A = Ed$$

⇩

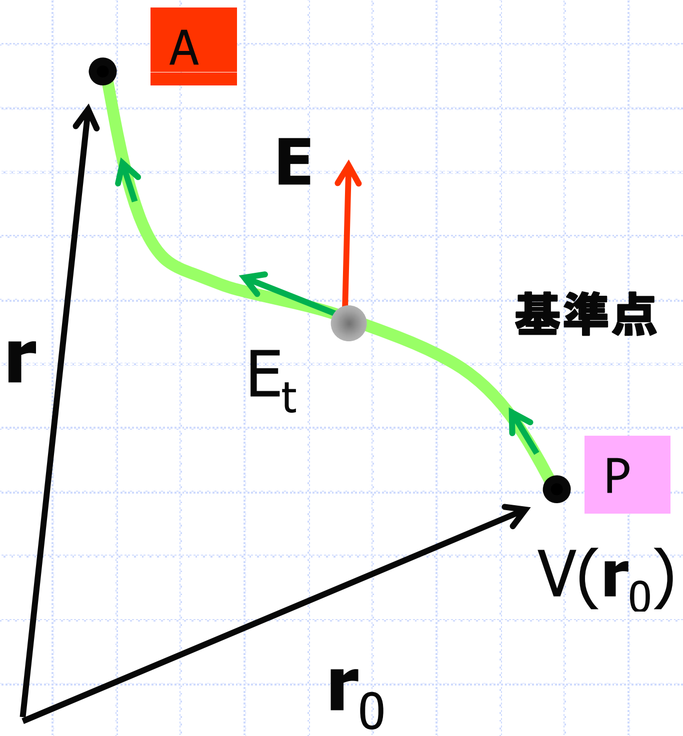
$$E = \frac{V_P - V_A}{d}$$

電場の単位V $[V/m]$

電圧(4)

$$\int_P^A E_t ds = V_P - V_A$$

点Pの位置ベクトルをr，点Aの位置ベクトルをr_0とすると点Pの電位は以下となる．



$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E_t ds + V(r_0)$$

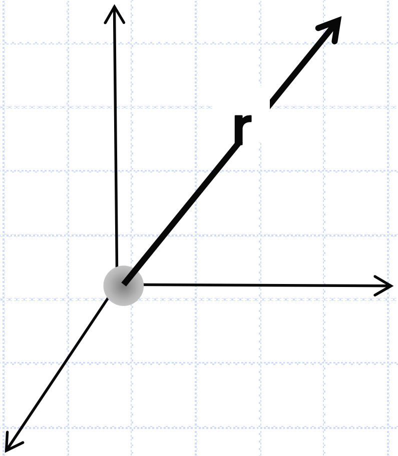
V_A V_P

電位は基準点(電位が0)を決める必要がある．そこで点Pを基準点，$V(r_0)=0$とすると

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E_t ds = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

例　点電荷による電位

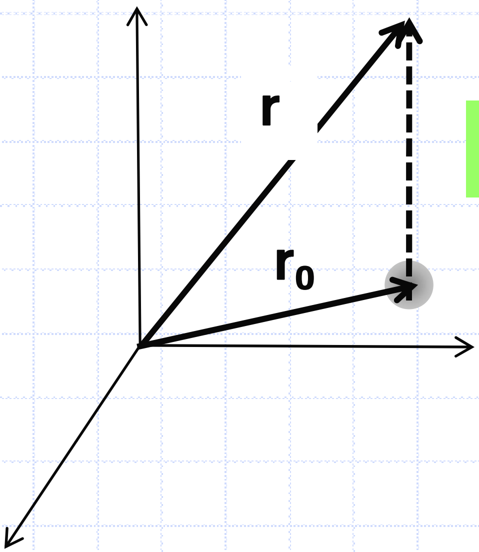
$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E_t ds = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$



原点に点電荷Qがある場合の点rの電位

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{s}$$

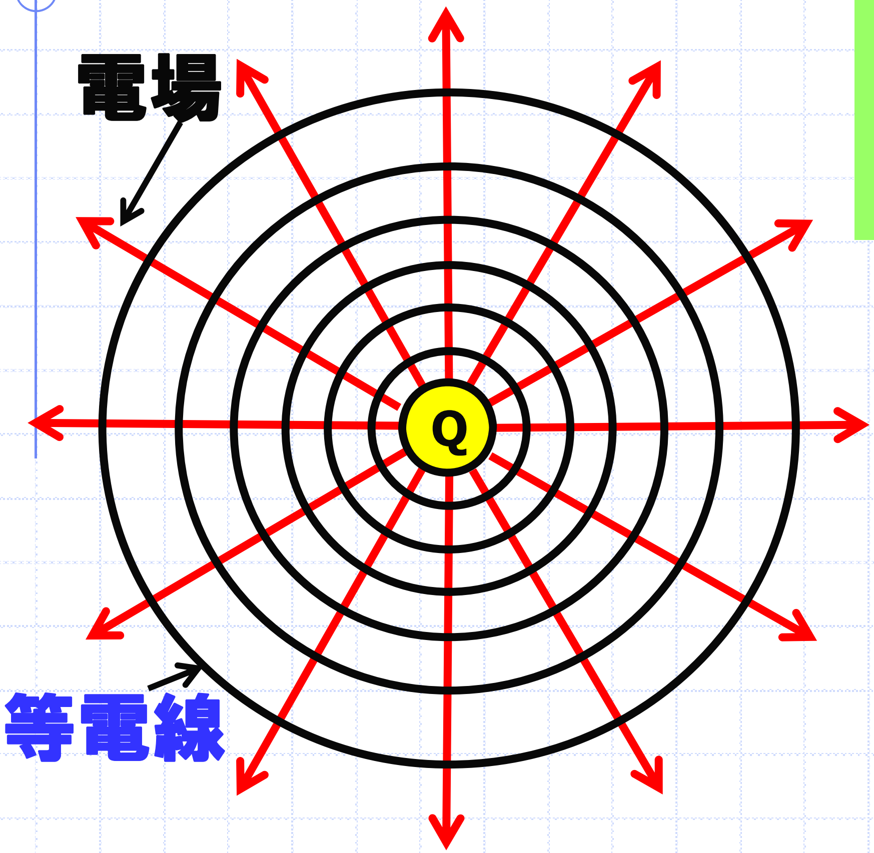
$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



点r_0に点電荷Qがある場合の点rの電位

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

等電位面(線)(1)



電荷Qによってできる等電位線

電場と等電面は直交する.

電場と等電線とも直交する.

電場は電位を偏微分することによって導かれる

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

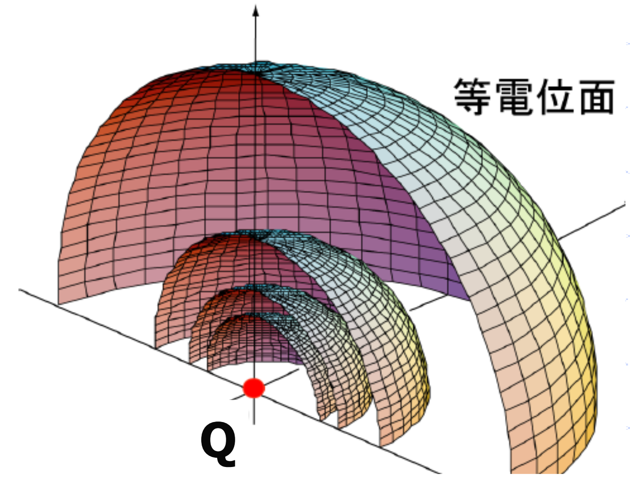
..... 重力場 ....

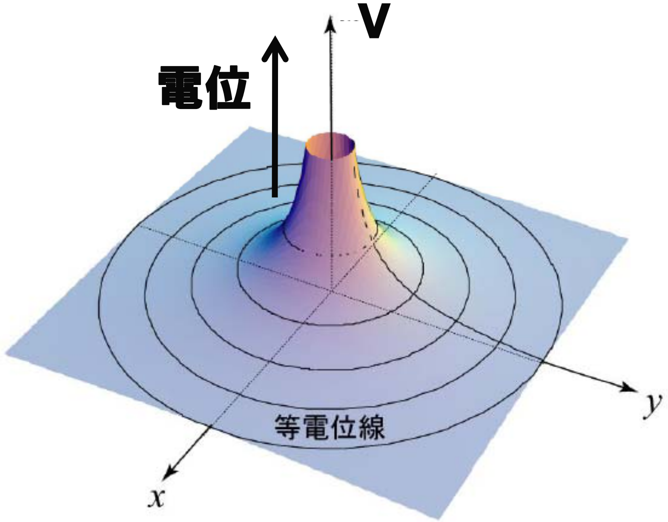
保存力Fと位置エネルギーUの関係

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

等電位面(線)(2)

例)点電荷Qによってできる等電位面および等電位線





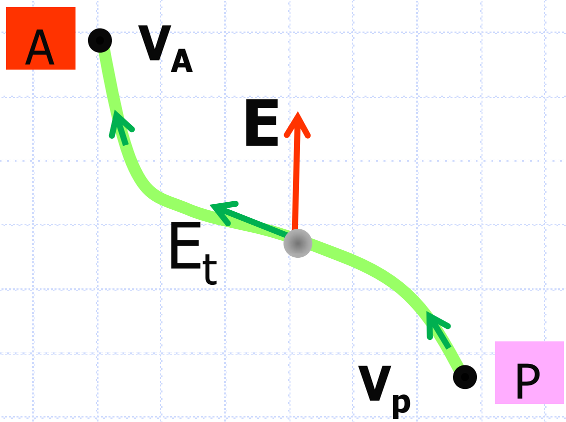
等電位面

電位の等しい点を連ねたときにできる面

等電位線

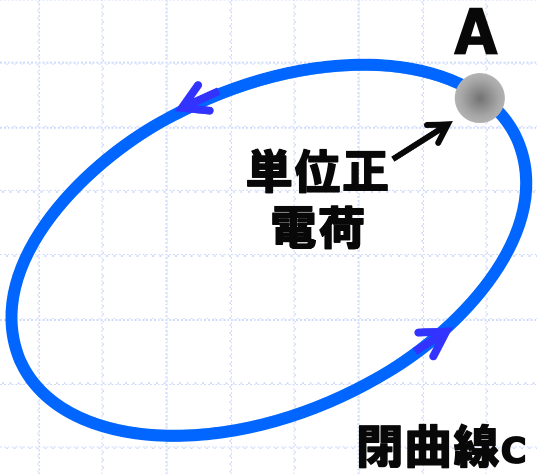
電位の等しい点を連ねた線

等電位面(線)(3)



2点P,Aの電位→電位差

$$\int_P^A E_t ds = V_P - V_A$$



閉曲線一周　電位差=0

$$\boxed{\oint_c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_c E_t ds = 0}$$

ふろく