「物理学概論II」電磁気

電流と磁場

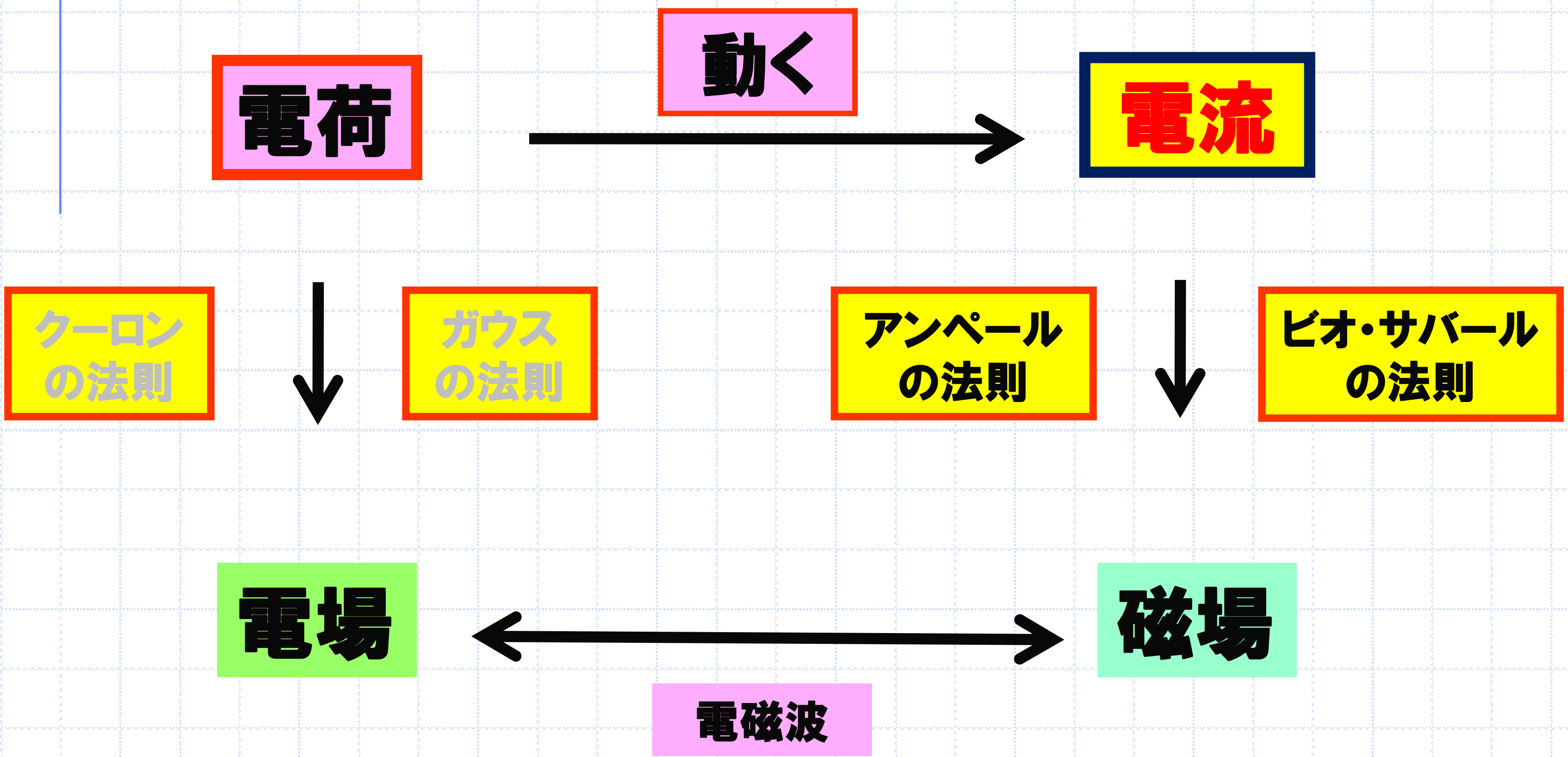
ビオサバールの法則，アンペールの法則

知能機械専攻

下条　誠

はじめに

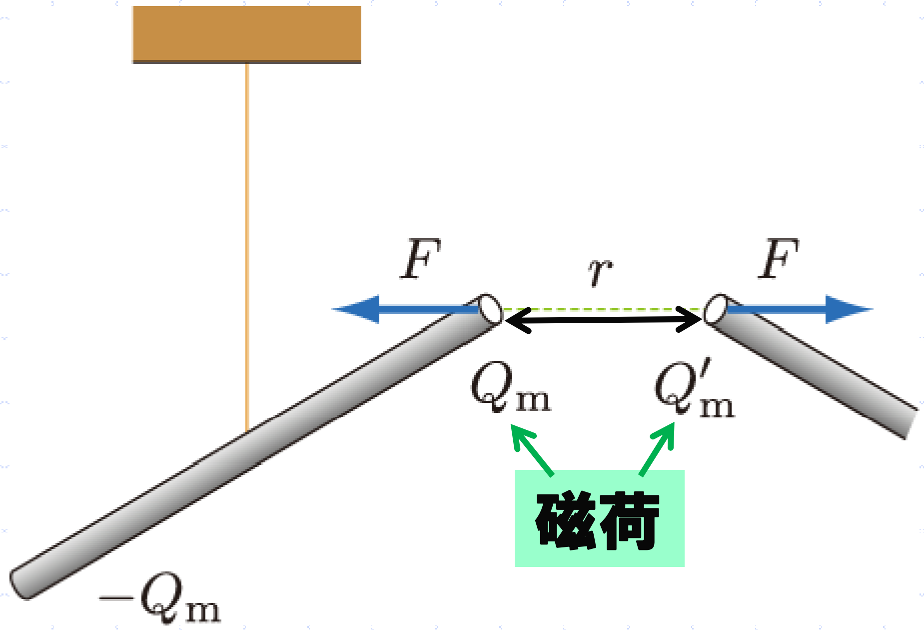
電流と磁場の話:イントロダクション



磁荷と磁界イントロ

まず始めに，磁荷と磁界の関係，ビオサバール法則，アンペールの法則について述べる

磁石と磁場



磁気力

$$F = k\frac{Q_m Q_m'}{r^2}$$

$Q_m Q_m' \succ 0$の場合

電荷に相当する磁荷を仮定すると，

静電気と対応しやすいため磁荷を考える

磁荷とは？

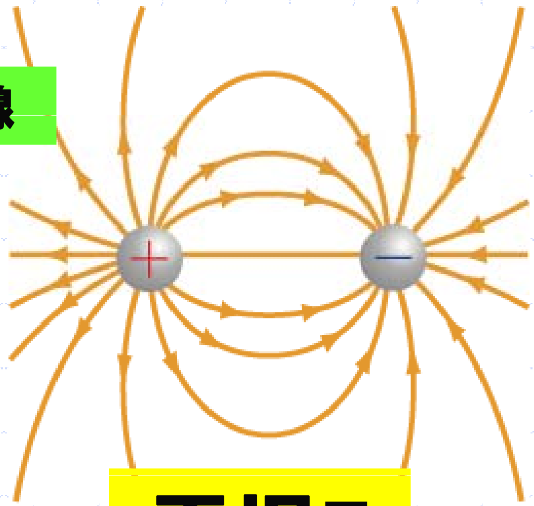
電荷 Q

磁荷 Q_m

クーロン力 $F \propto \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

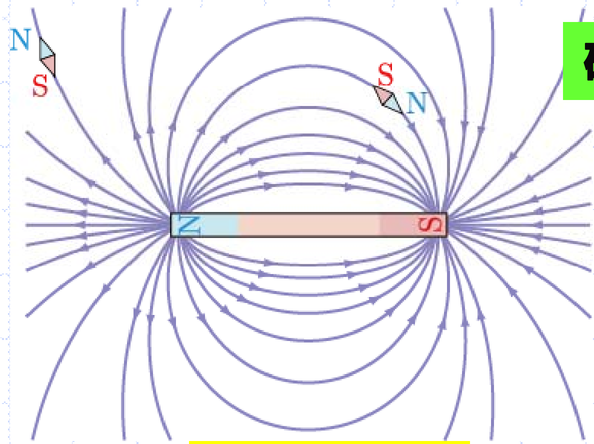
$F \propto \dfrac{Q_{m1} Q_{m2}}{r^2}$ 磁気力

電気力線



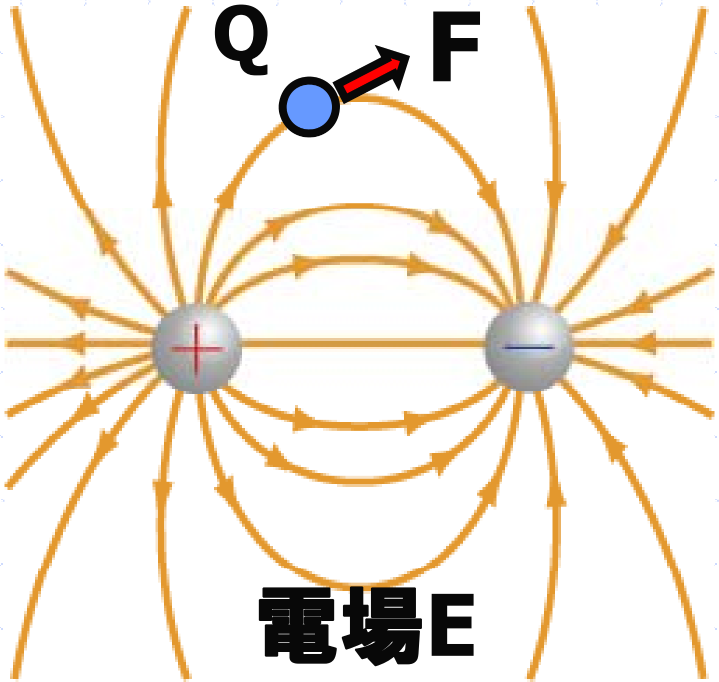
電場E

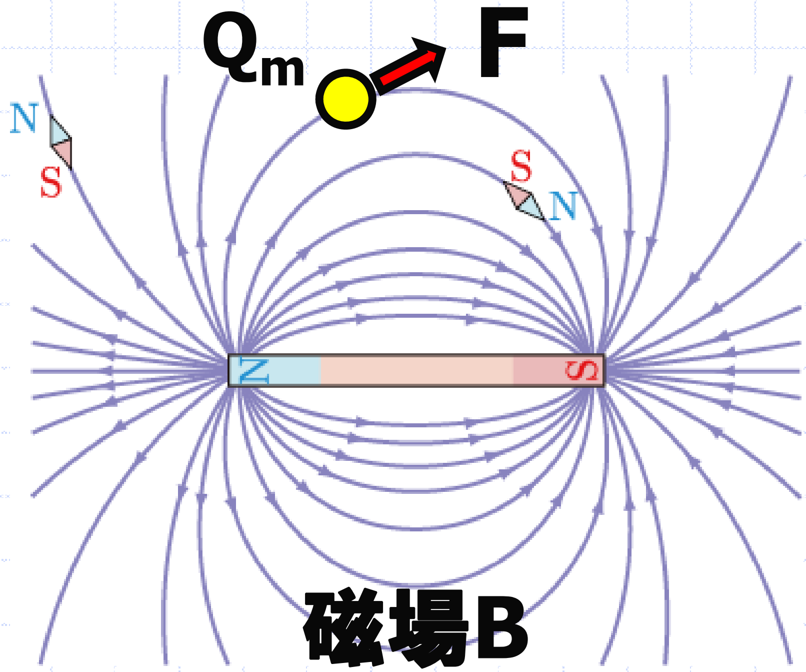
磁力線



磁場B

磁場と電場のアナロジ



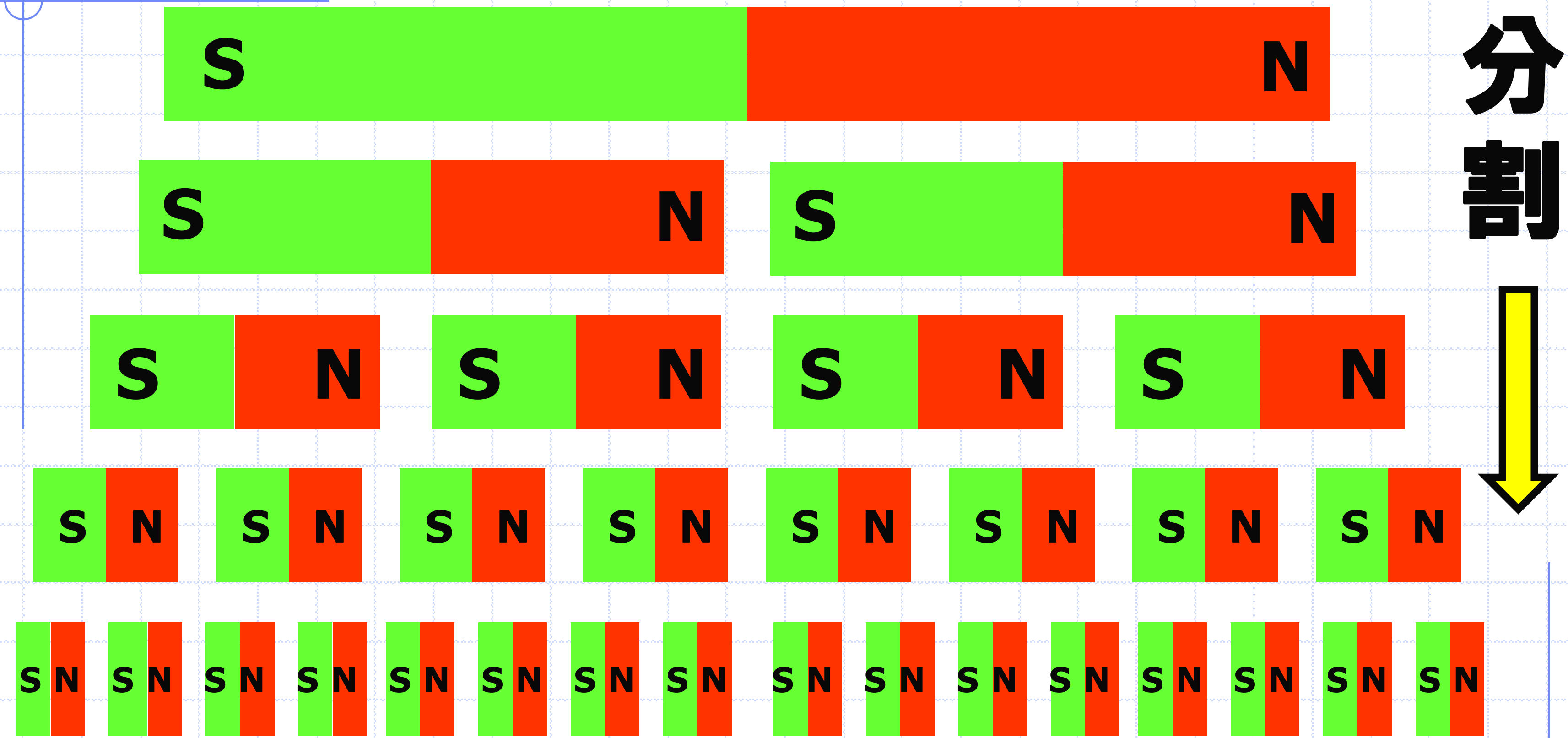


$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{F} = Q_m\mathbf{B}(\mathbf{r})$$

磁場B：単位　テスラ（記号T）

磁荷は存在する？

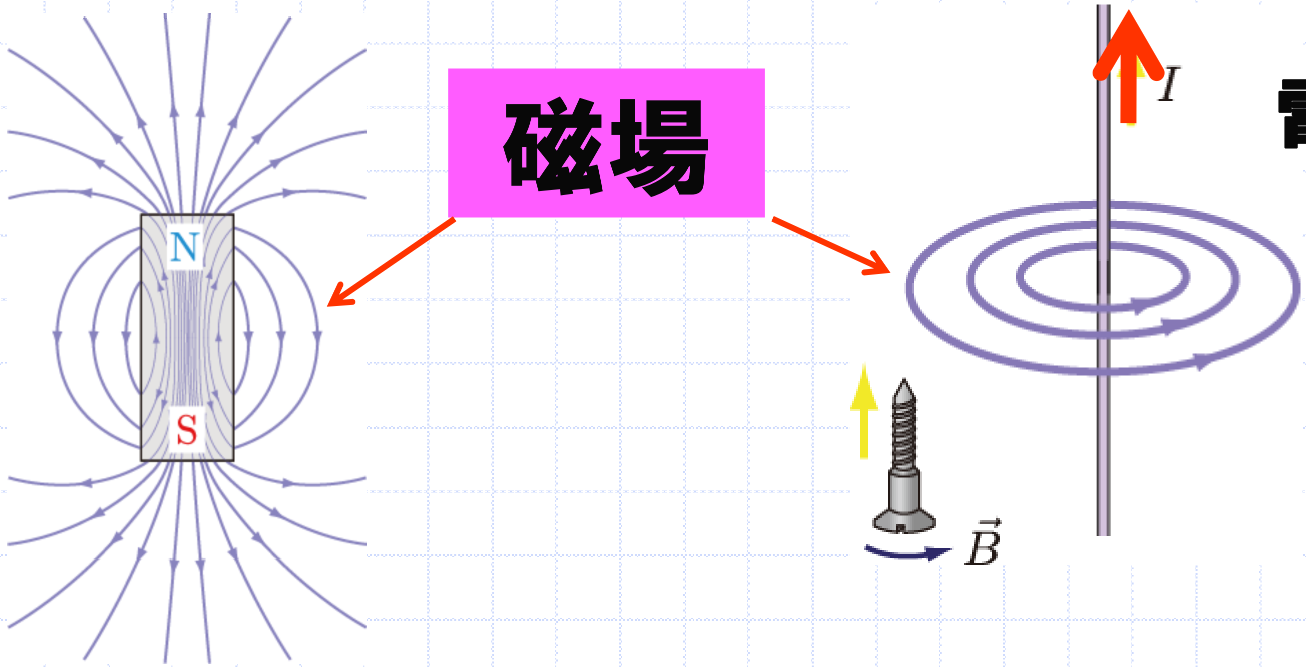


磁石をどれだけ細かく切っても，切った端にN極とS極が表れ，単独でN極とS極を取り出すことはできない

磁気単極子（モノポール）：磁気単極を持った粒子が存在する可能性はありますが、まだ、発見されていない．

電流と磁場

磁石



電流

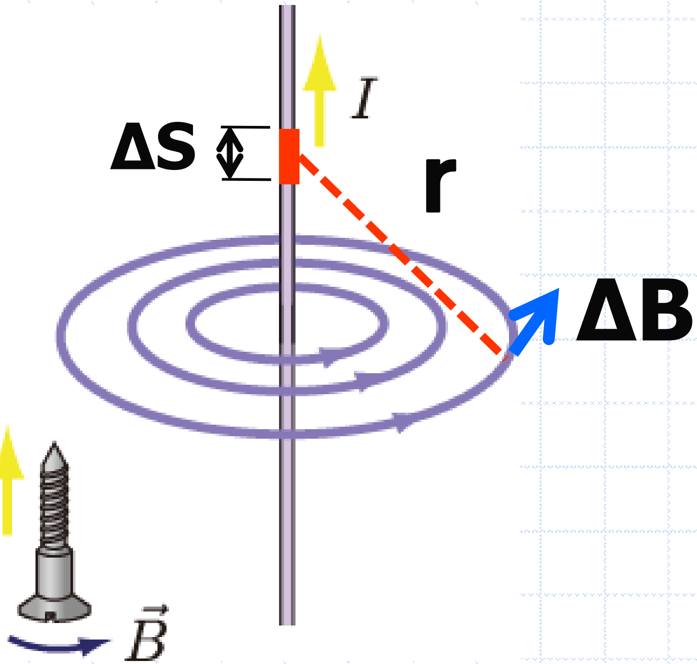
磁場は磁石だけではなく，電流によっても生じる

本講義では，

磁場は，**電流**によって生じるとして，電流と磁場の関係を述べる

ビオサバールの法則

電流によって磁場が発生



電流Iが流れる導線の微小部分Δs

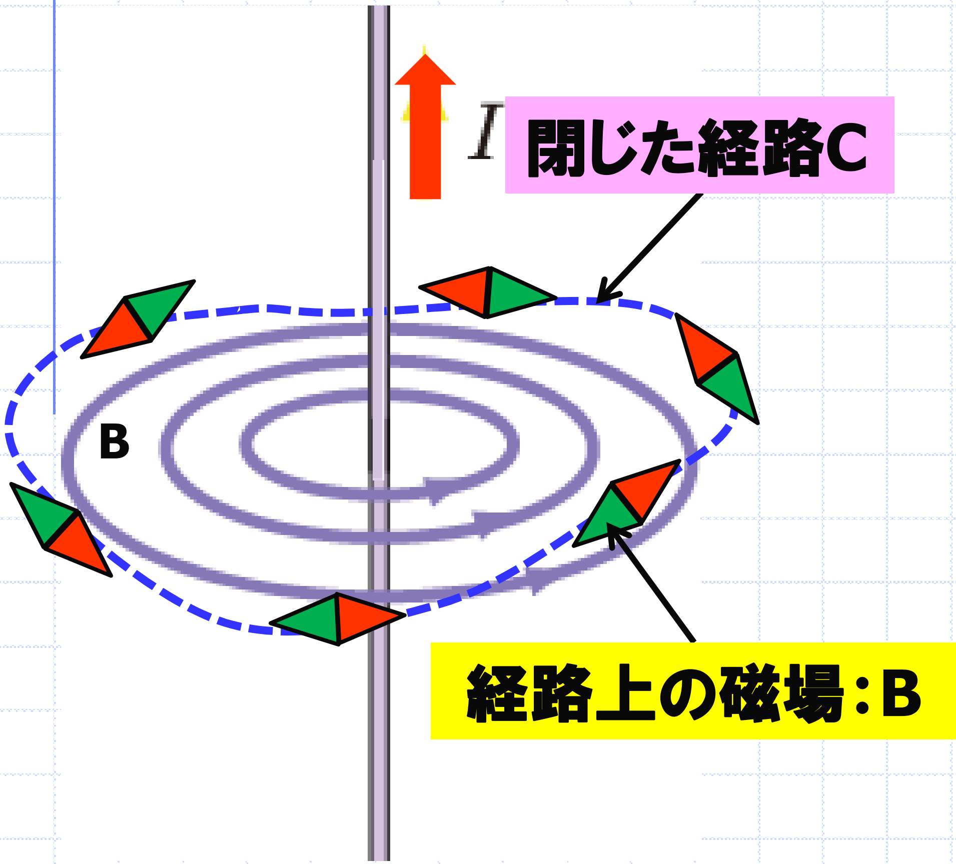
Δsが磁場に与える変化ΔB

ΔBはΔSからの距離に関係

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I \Delta\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

ビオサバールの法則は，以上の関係を表したもの

アンペールの法則



閉じた経路にそって磁場の大きさを積分

＝

閉じた経路を貫く電流の和に比例

数式で記述すると

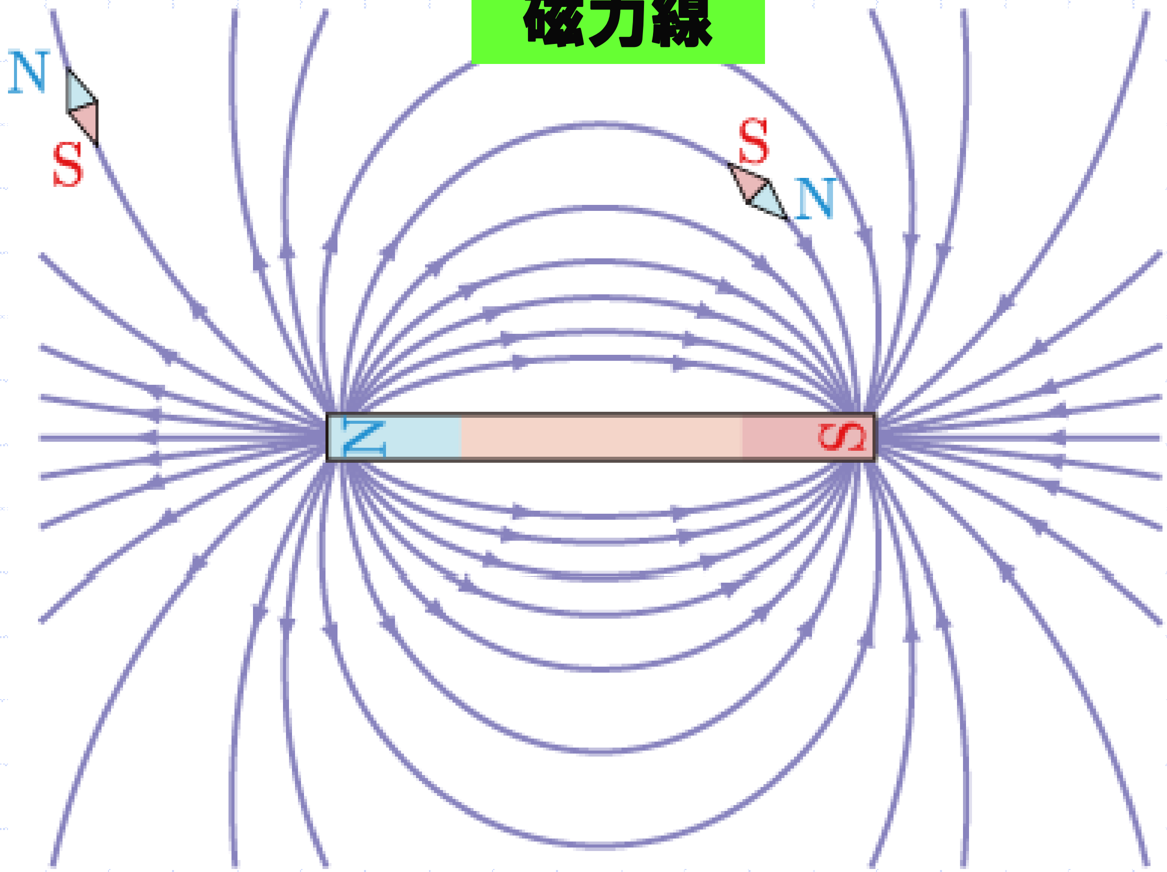
$$\oint_C B_t ds = \mu_0 I$$

各論はじまり

磁石と磁場

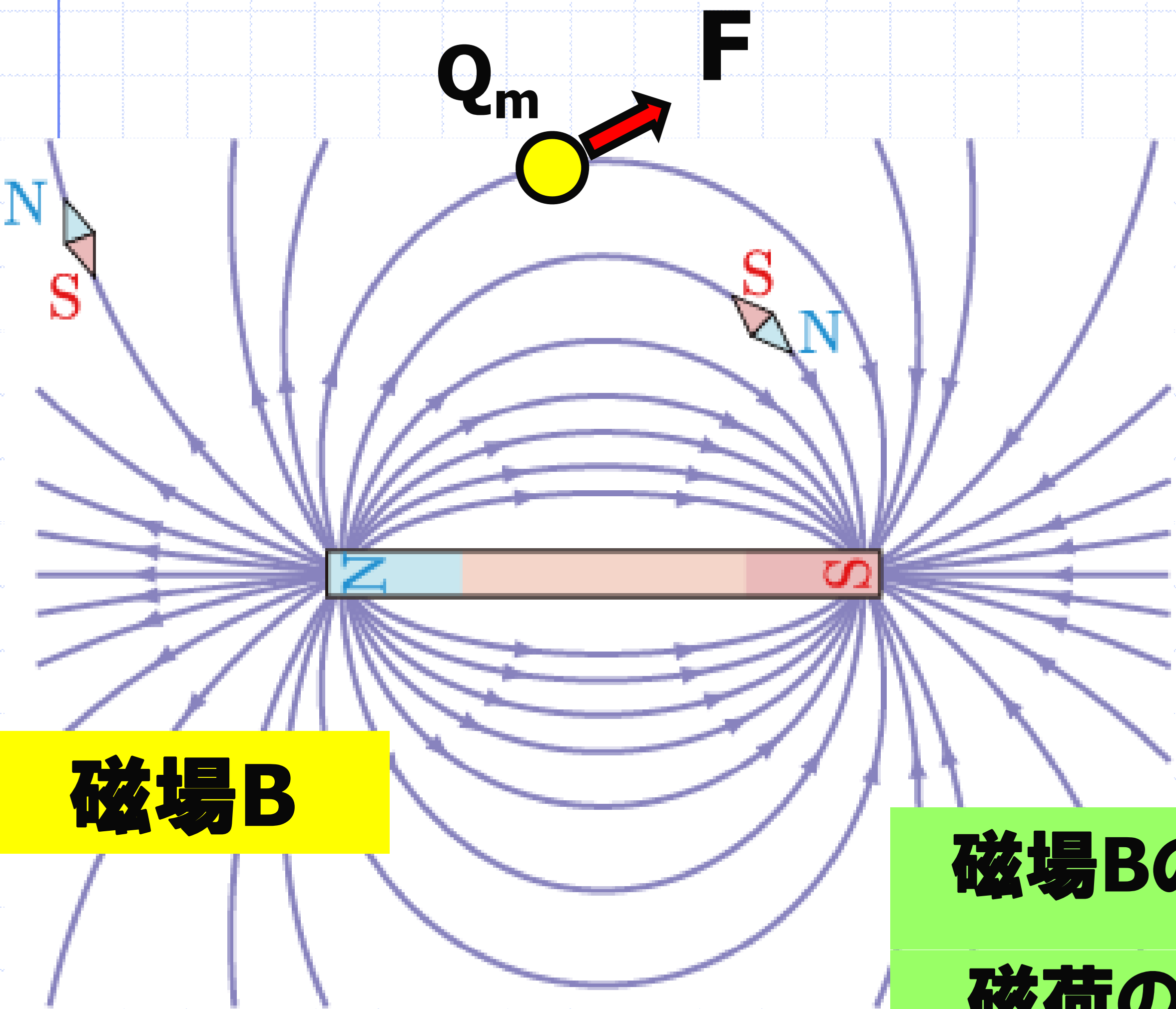
磁力線

磁場B



理学系では「磁場」, 工学系では「磁界」という

磁石と磁場



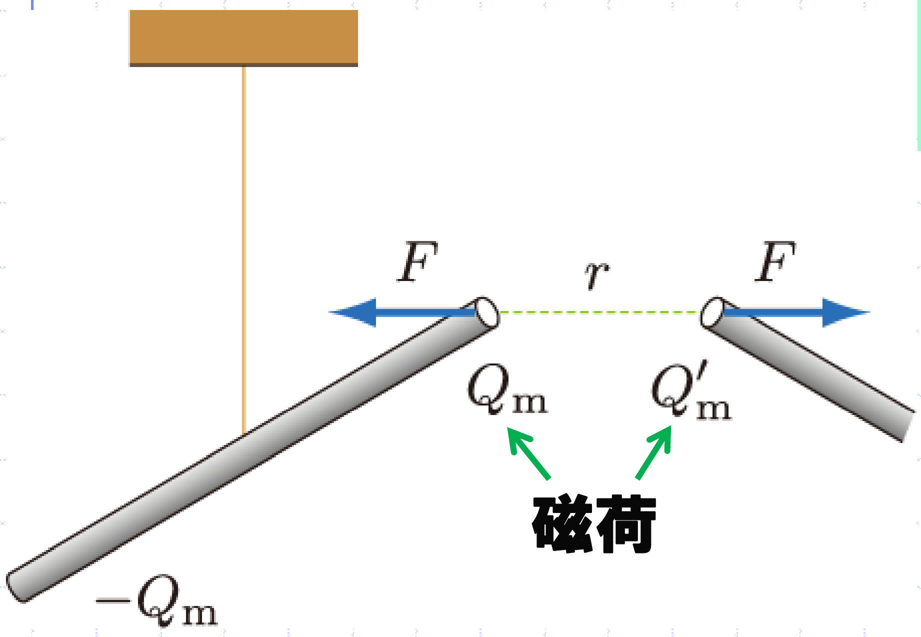
○：磁荷

$$\mathbf{F} = Q_m \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

磁場Bの単位：T[テスラ]

磁荷の単位：N/T=A/m

磁場の決め方



磁荷Q_mに作用する**磁気力**
Fを用いて磁場Bとする

$$\boxed{\vec{F} = Q_m \vec{B}}$$

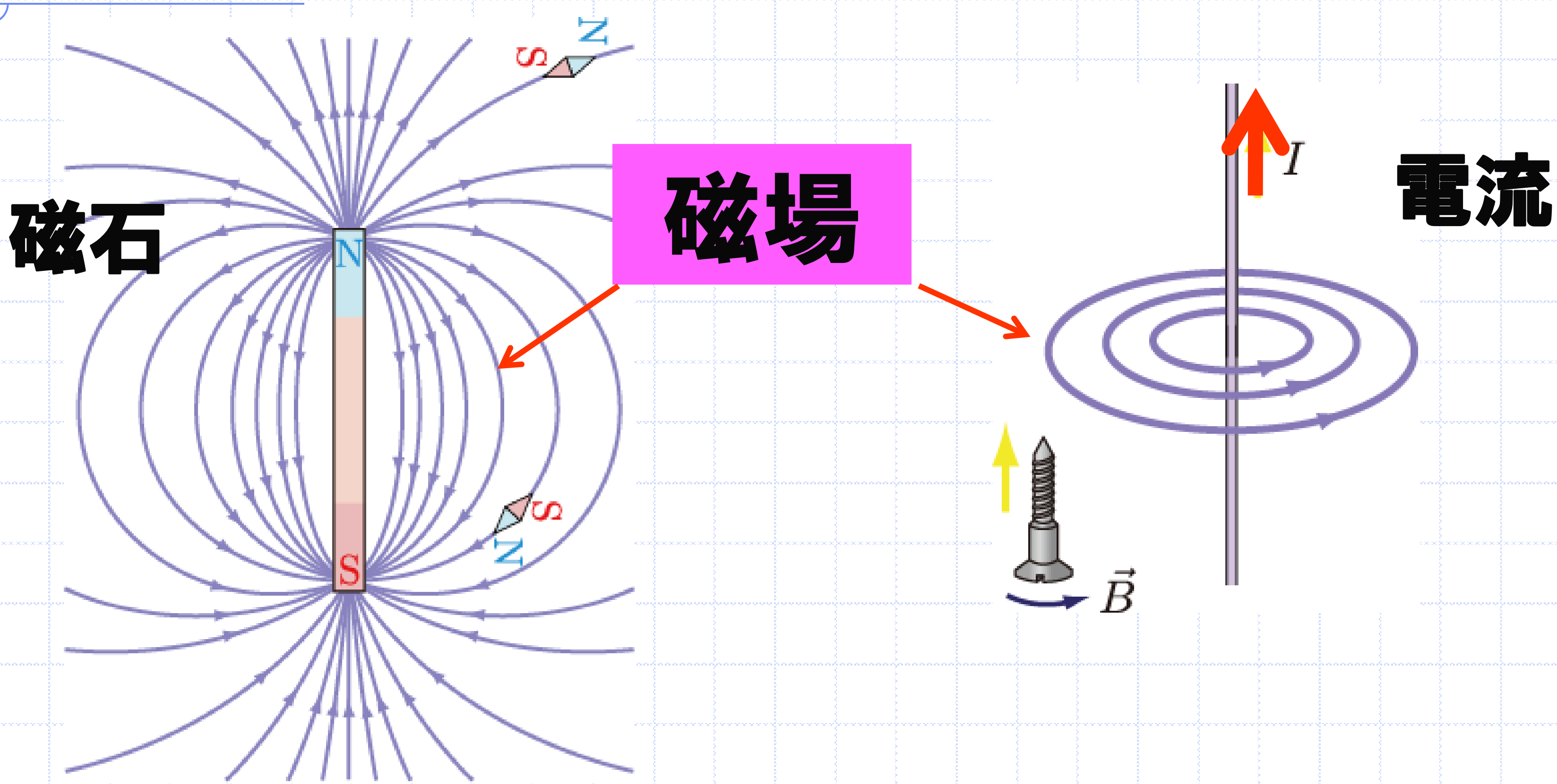
$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{Q_m}$$

B単位：テスラ[T]

（T = Wb・m^{-2})

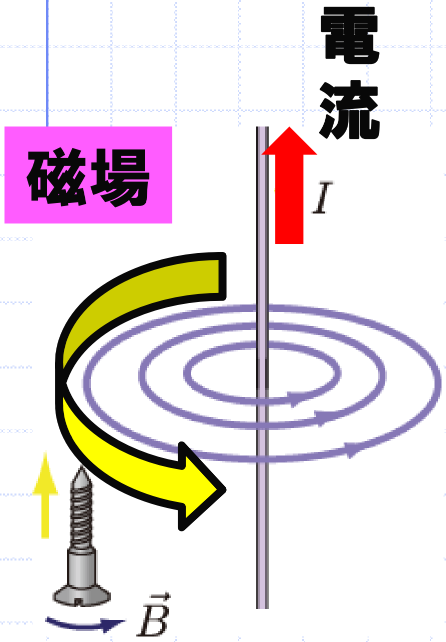
単磁極は存在しないが，磁気作用を考える場合，電荷に相当する磁荷を仮定すると静電気と対応しやすいため磁荷を便宜上導入する．

磁場（1）



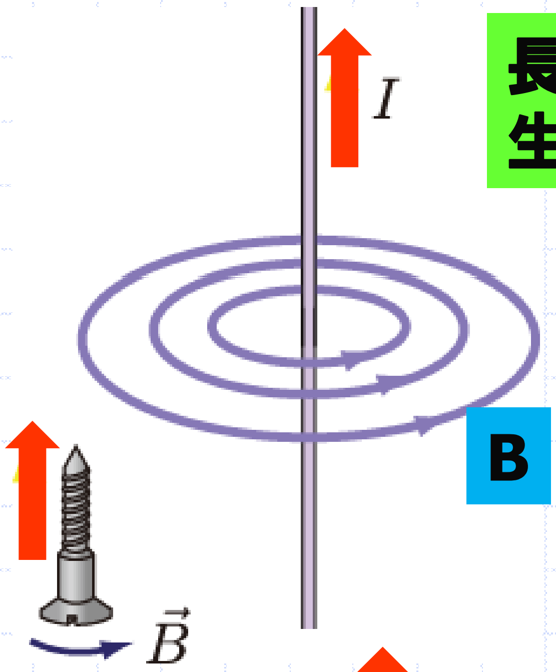
磁場は磁石だけではなく，電流によっても生じる

磁場 (2) 電流によってできる磁場



http://www.youtube.com/watch?v=yYUJ7bDmvMo

電流の作る磁場(1)



長いまっすぐな導線に電流が流れた時に,
生じる磁場について

- 磁力線の形状は円
- 磁場の向きは電流の流れる方向に進む右ねじの回る向き

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

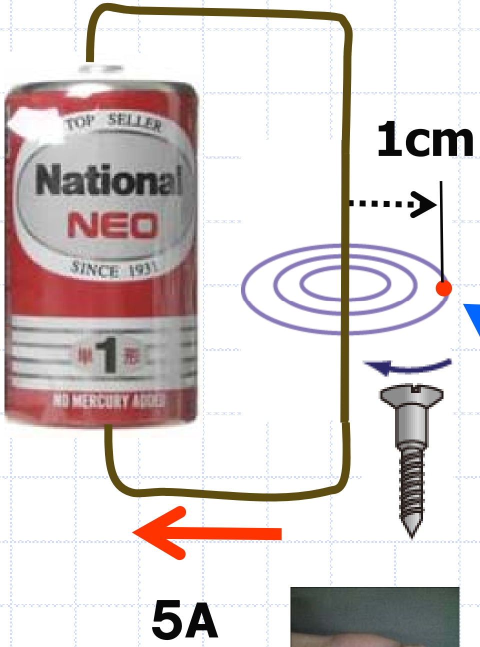
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T \cdot m/A$$

真空の透磁率

電流の作る磁場（2）

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

例1

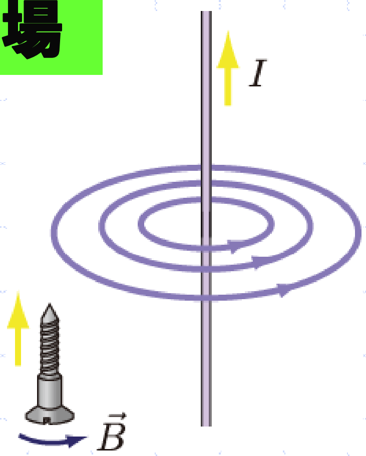


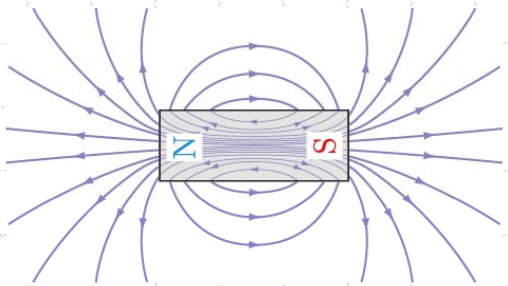
単1の乾電池の両端を少し太めの銅線でショートさせたら5Aの電流が流れた．銅線から1cm離れた所の磁場Bの強さは，

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}\times5}{2\pi\times0.01}=10^{-4}\ T$$

電流の作る磁場(3)

磁場



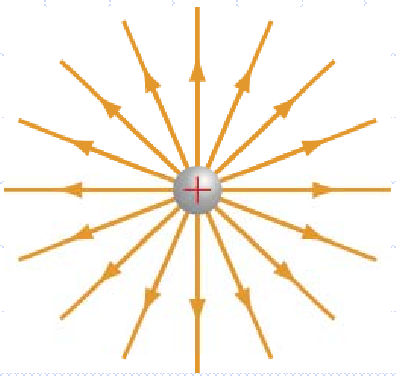


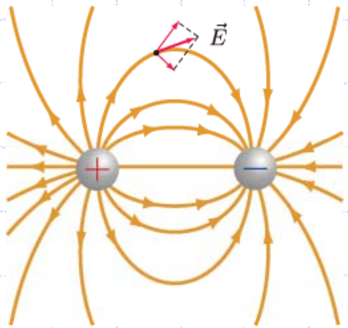
磁場Bの磁力線は始点と終点がない閉曲線である.

電場のように湧き出し口,吸い込み口がない

理由:磁荷がないため

電場



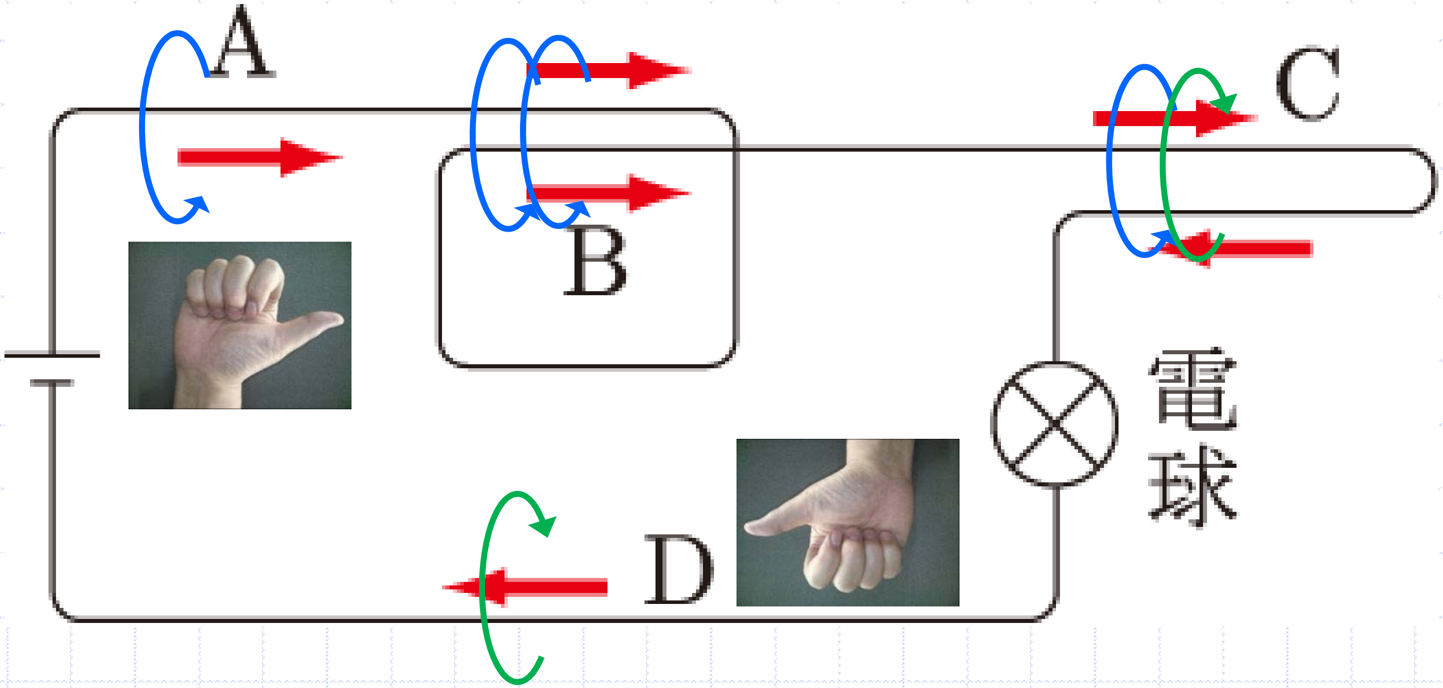


電気力線は始点と終点がある.

流体に例えると,
+電荷は湧き出し口
- 電荷は吸い込み口
電気力線は流線
に相当する

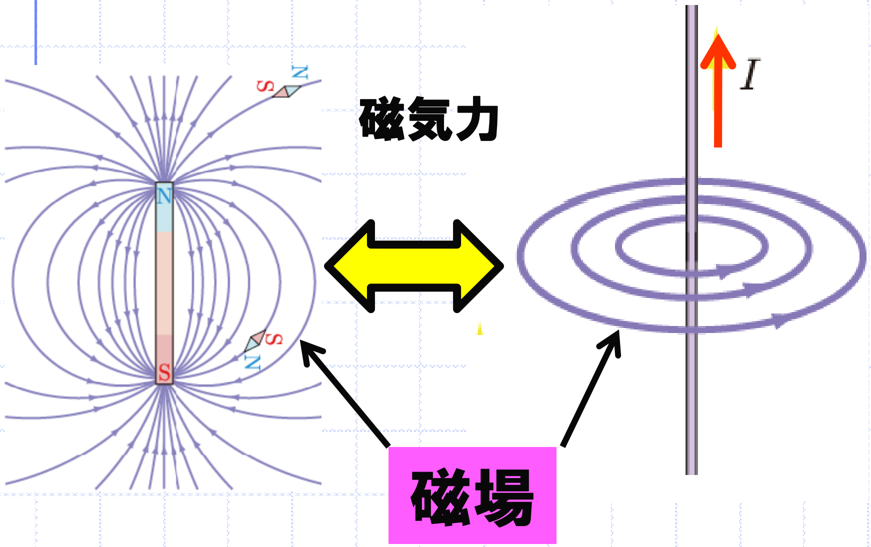
電流の作る磁場 (4)

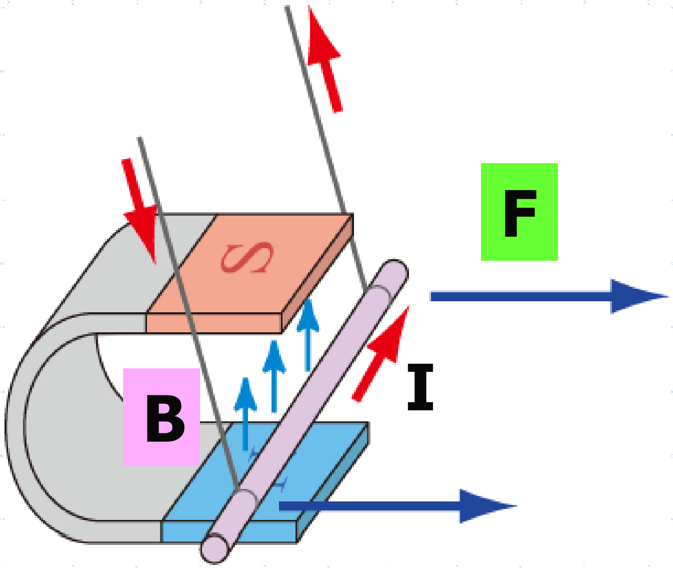
電流の作る磁場Bについても重ね合わせの原理が成り立つ



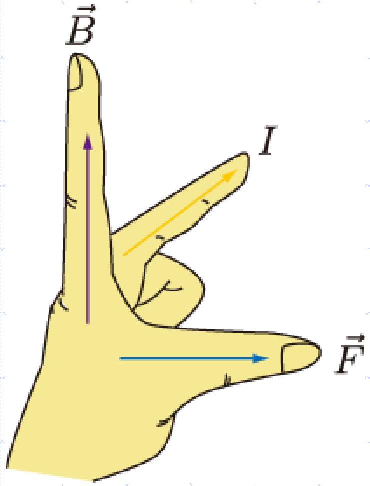
A:B:C:D ⇨ 1:2:0:1

電流に働く力 (1)



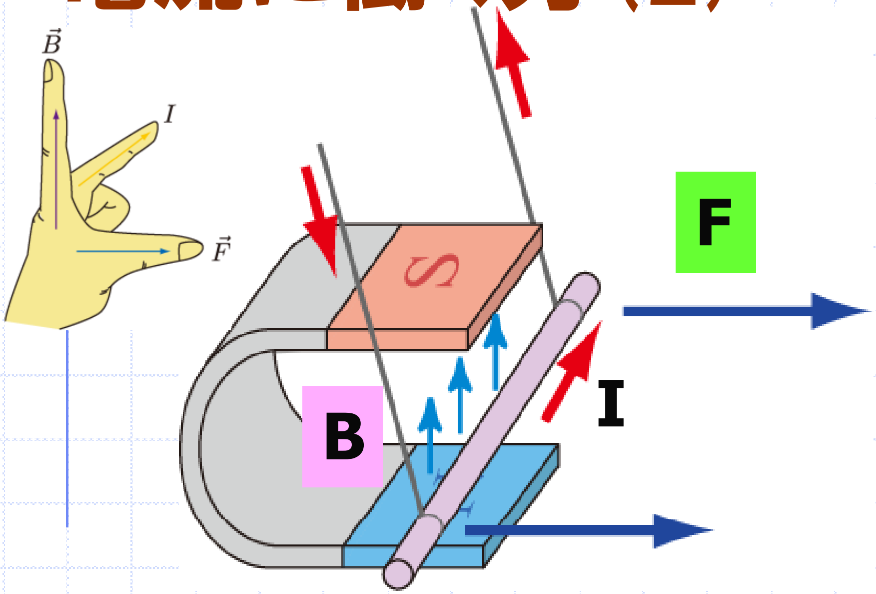


磁気力は磁場を通して作用する



フレミングの左手の法則

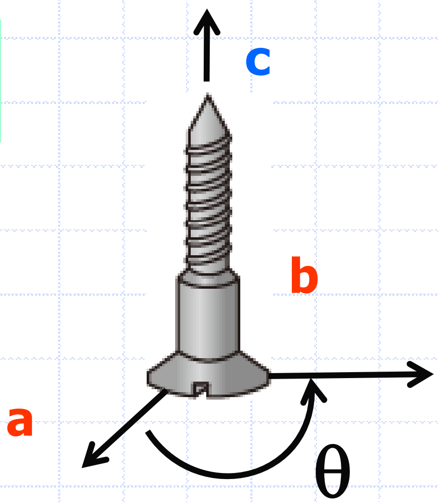
電流に働く力（2）



$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$I\vec{L}$：電流の方向を向いた長さILのベクトル

外積

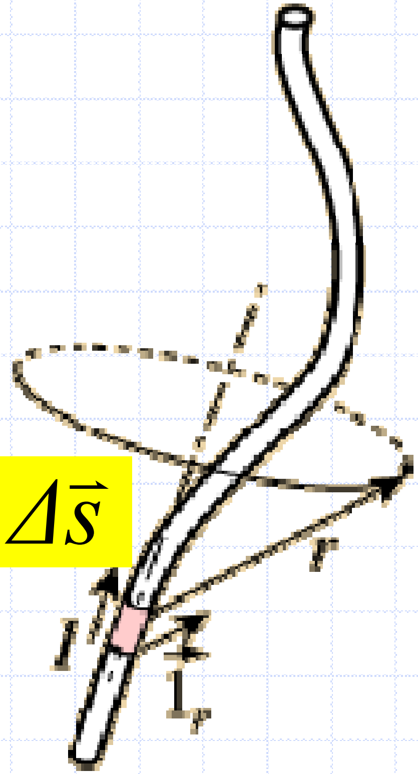


$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \sin\theta$$

ビオ・サバールの法則

任意の形をした導線を流れる電流の作る磁場を求める規則



$\Delta\vec{s}$

$\Delta\vec{B}$

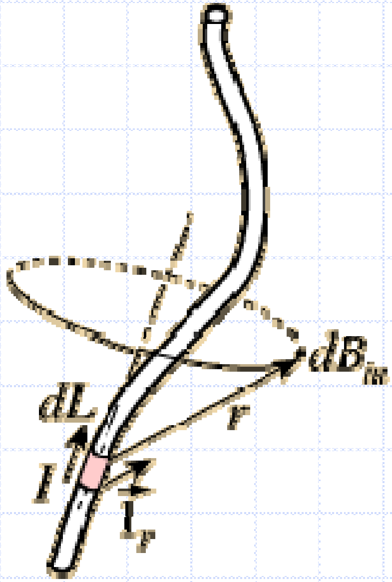
ベクトル量

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I \Delta\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

大きさとしては

$$\left| \Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2} \right|$$

ビオとサバール

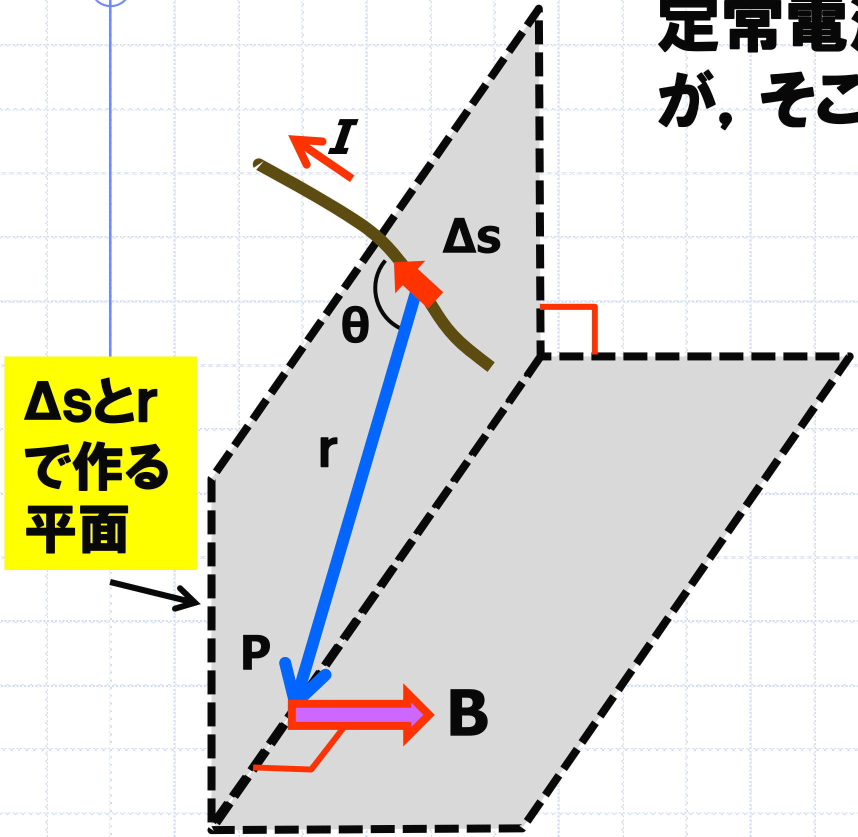


ジャン＝バティスト・ビオ（Jean-Baptiste Biot、1774年 – 1862年）は、フランスの物理学者、天文学者、数学者

フェリックス・サヴァール（Félix Savart、1791年 – 1841年）はフランスの物理学者、外科医である。

電流の作る磁場2　ビオーサバールの法則

定常電流Iが流れている導線の微小部分Δsが，そこから距離rの点Pに作る磁場ΔBは，

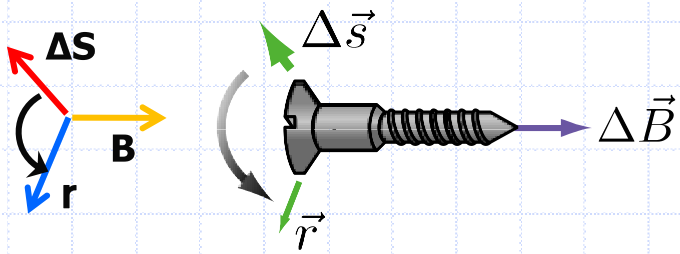


大きさ

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2}$$

方向

- Δsとrの両者に垂直
- 右ねじをΔsからr方向に回した時の右ねじの進む方向

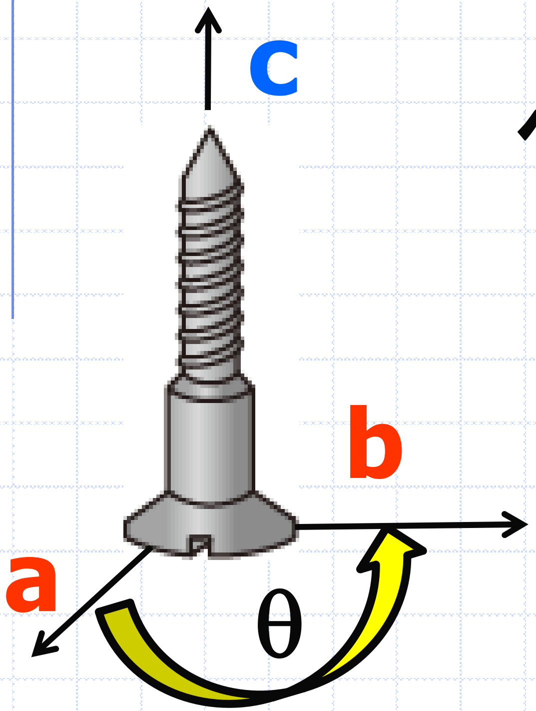


ベクトル表現

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I \Delta\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

ベクトルの外積

2つのベクトルに対して外積は次のようになる



ベクトル量: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

大きさ: $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \sin\theta$

方向: 右ねじの進む方向

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

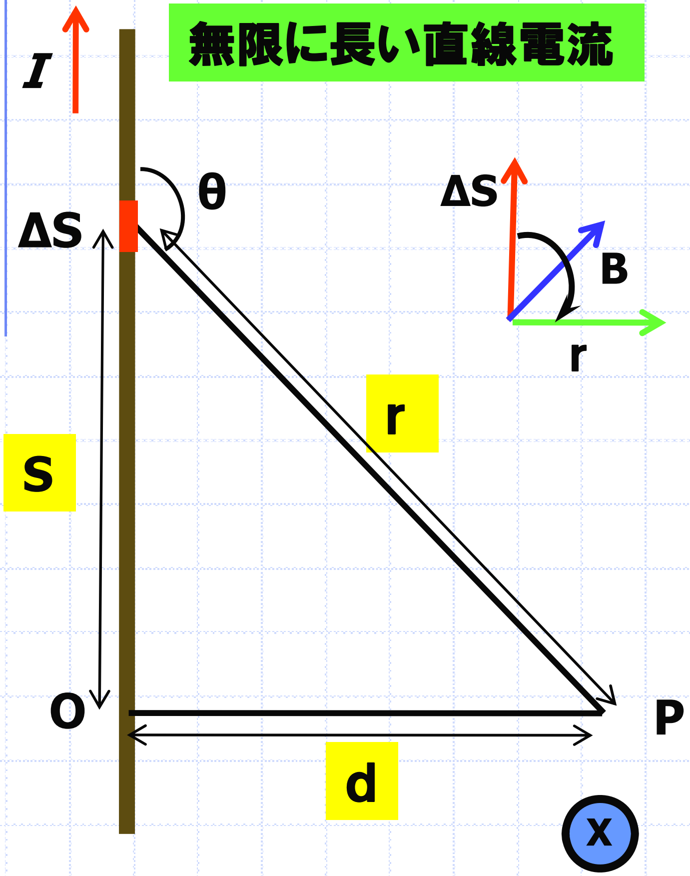
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

ベクトルの成分で表示すると

ビオーサバールの法則 (2)

例題

無限に長い直線電流



大きさ

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2}$$

$$r = \frac{d}{\sin\theta} \qquad s = -\frac{d}{\tan\theta}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{\sin^2\theta} \Rightarrow ds = \frac{d}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\sin\theta}{r^2}ds$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{I\sin\theta}{r^2}\frac{d}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{d}d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

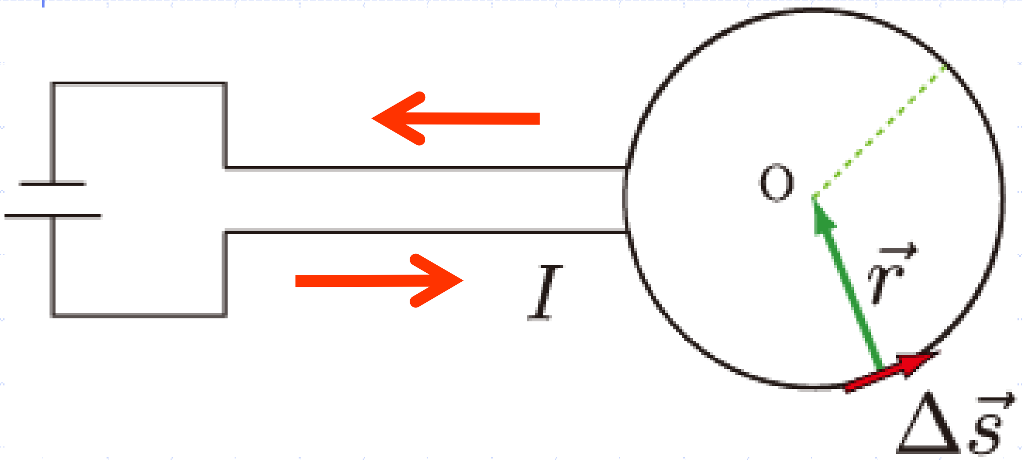
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

ビオーサバールの法則 (3)

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2}$$

例題 円電流が作る磁場

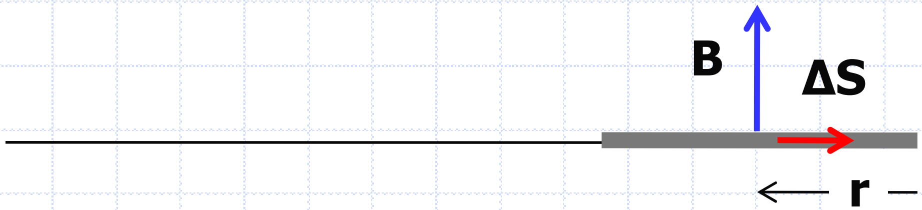
1巻きの円形の銅線(コイル)を流れる電流Iによって，円の中心位置にできる磁場を求める



$$B = \sum \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\sum \Delta s$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \times (2\pi R)$$

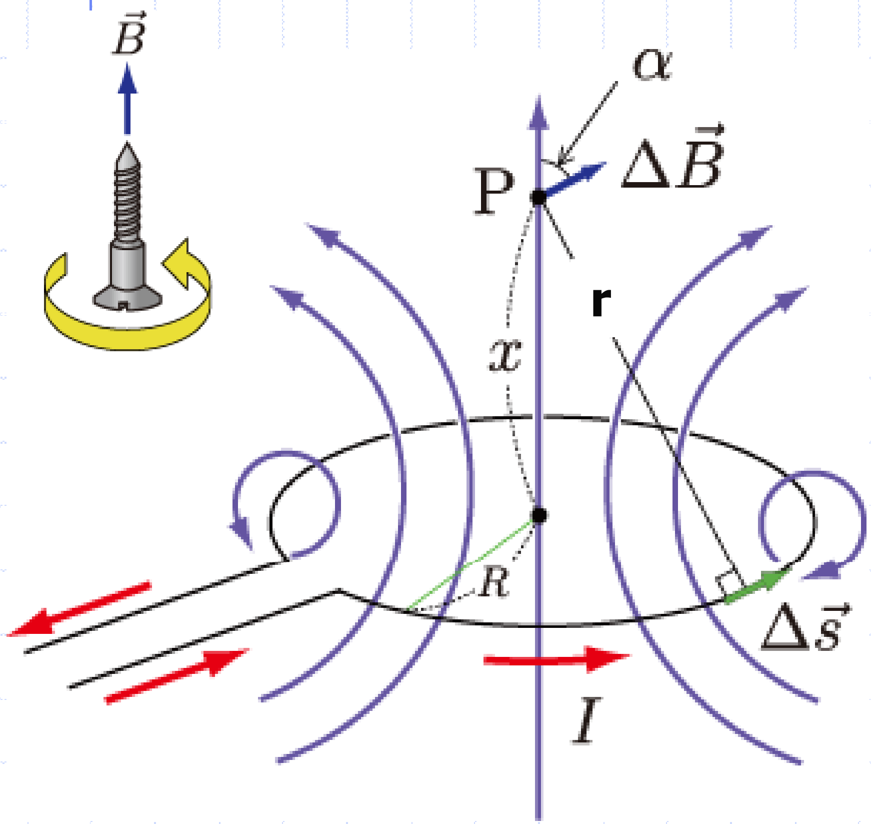
$$= \frac{\mu_0 I}{2R}$$



ビオーサバールの法則 (4)

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2}$$

例題 **1巻きの円形の銅線(コイル)を流れる電流Iによって，円の中心から距離xの点Pにできる磁場を求める**



$$B = \sum \Delta B \cos\alpha$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)} \cos\alpha \sum \Delta s$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(R^2 + x^2\right)} \times \frac{R}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}} \times \left(2\pi R\right)$$
$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

ビオーサバールの法則 (5)

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

長いソレノイドを流れる電流が作る磁場

多くの円電流の集まりとして計算.

n:単位長さ当たりの巻き数

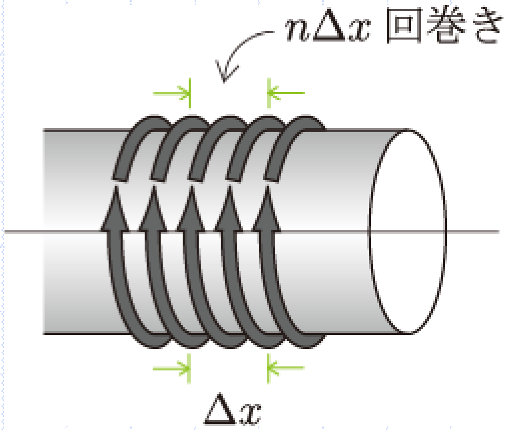
$$B=\frac{\mu_0 n I R^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

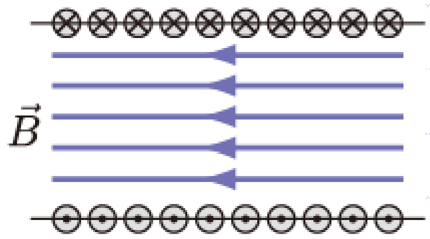
但し, 幾何学的関係から

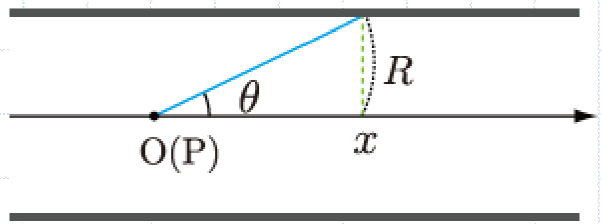
$$x=R\cot\theta,\quad R=\left(R^2+x^2\right)^{1/2}\sin\theta$$

$$dx=-R\,d\theta/\sin^2\theta$$

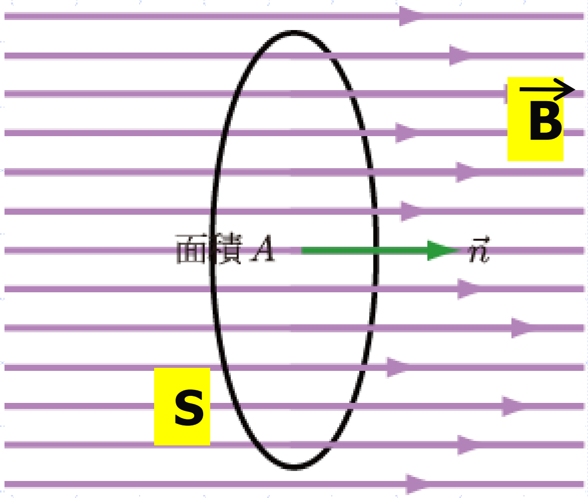
$$B=-\int_{\pi}^{0}\frac{\mu_0 n I}{2}\sin\theta d\theta=\left[\frac{\mu_0 n I}{2}\sin\theta\right]_{\pi}^{0}=\mu_0 n I$$

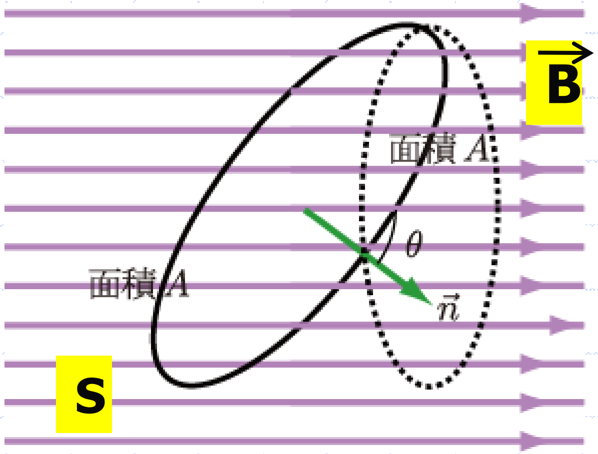






磁束と磁場Bのガウスの法則





平面Sを貫く磁束

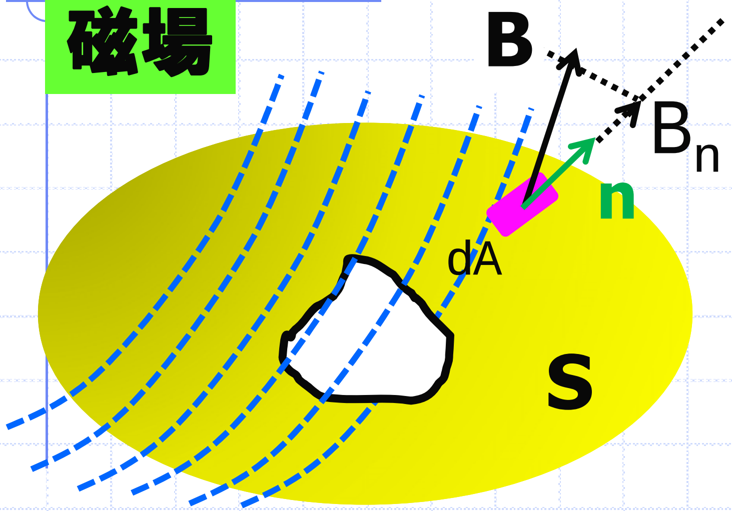
$$\Phi_B = BA\cos\theta = B_n A$$

$$\left(B_n = B\cos\theta\right)$$

$$\Phi_B = \iint_S B_n dA$$

磁場Bのガウスの法則

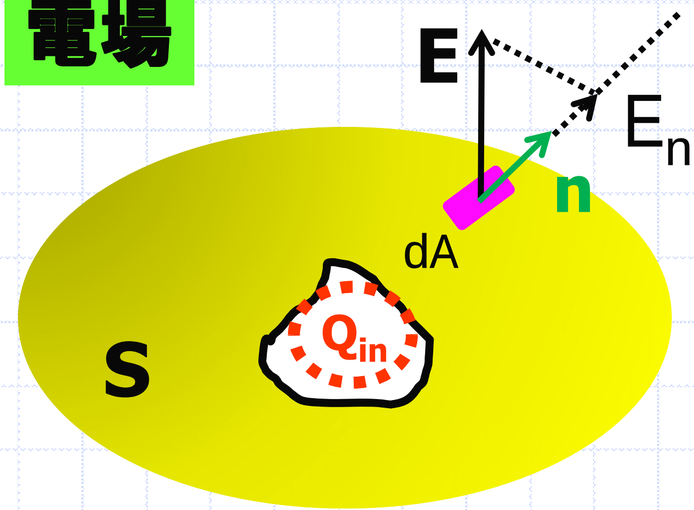
磁場



磁場Bは始点も終点もなく，途切れることもない閉曲線より，閉曲面Sの面積分は

$$\iint_S B_n dA = 0$$

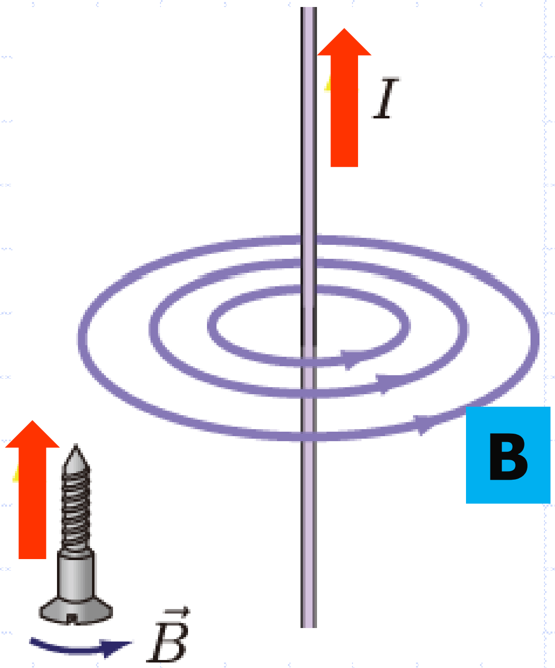
電場



電場Eは電荷から電気力線が湧き出すため閉曲面S内部にある電荷により面積分は

$$\iint_S E_n dA = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

アンペールの右ねじの法則



磁力線の方向

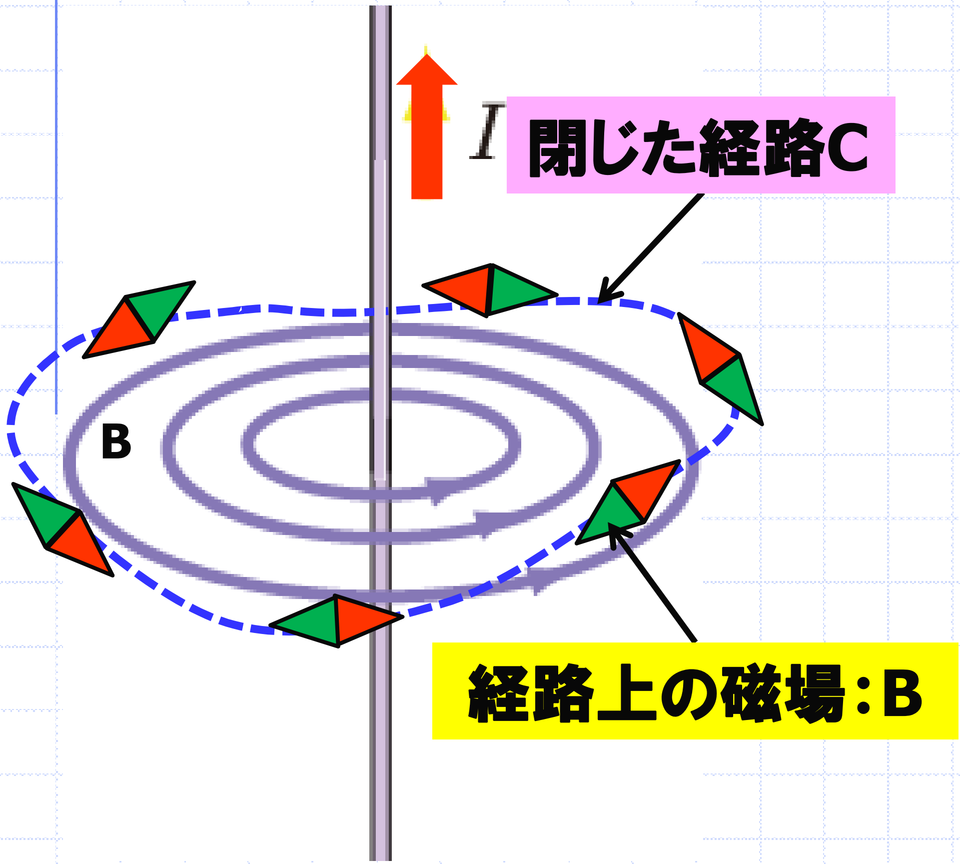
電流を流すと、電流の方向を右ネジの進む方向として、右ネジの回る向きに磁場が生じることを発見した。電流とそのまわりにできる磁場との関係をあらわす法則を「アンペールの法則」と呼ぶ。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

アンペール

アンドレ=マリ・アンペール(André-Marie Ampère, 1775年-1836年)は、フランスの物理学者、数学者。電磁気学の創始者の一人

アンペールの法則 (1)



閉じた経路にそって磁場の大きさを積分

＝

閉じた経路を貫く電流の和に比例

数式で記述すると

$$\oint_C B_t ds = \mu_0 I$$

アンペールの法則 (2)

$$\oint_C B_t ds = \mu_0 I$$

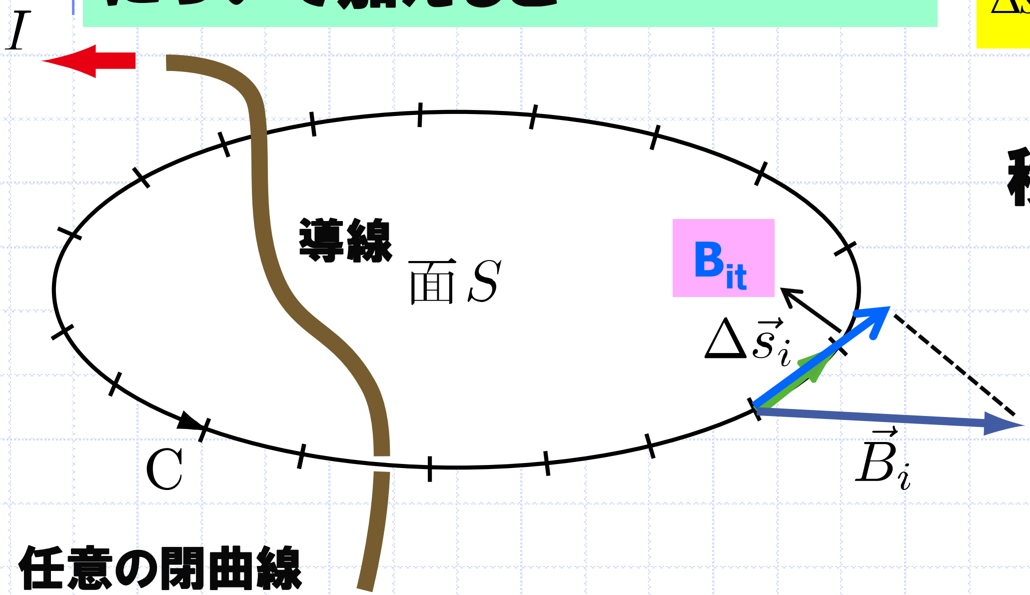
道筋の各部分の長さΔs_iとその位置で定常電流Iが作る磁場B_iの接線方向成分B_{it}の積

$$B_{it}\Delta s_i$$

線積分の意味は？

これを閉曲線Cの道筋に全てについて加えると

$$\lim_{\Delta s_i \to 0, N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} B_{it}\Delta s_i = \mu_0 I$$

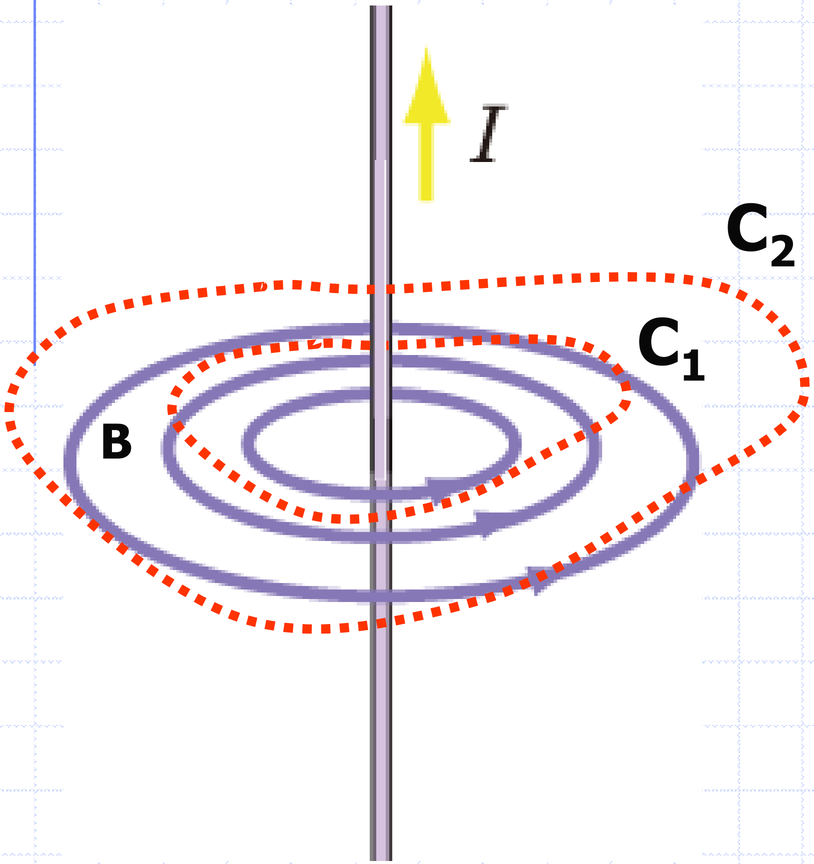


任意の閉曲線

積分形（線積分）で表わすと

$$\oint_c B_t ds = \mu_0 I$$

アンペールの法則 (3)



閉じた経路にそって磁場の大きさを積分

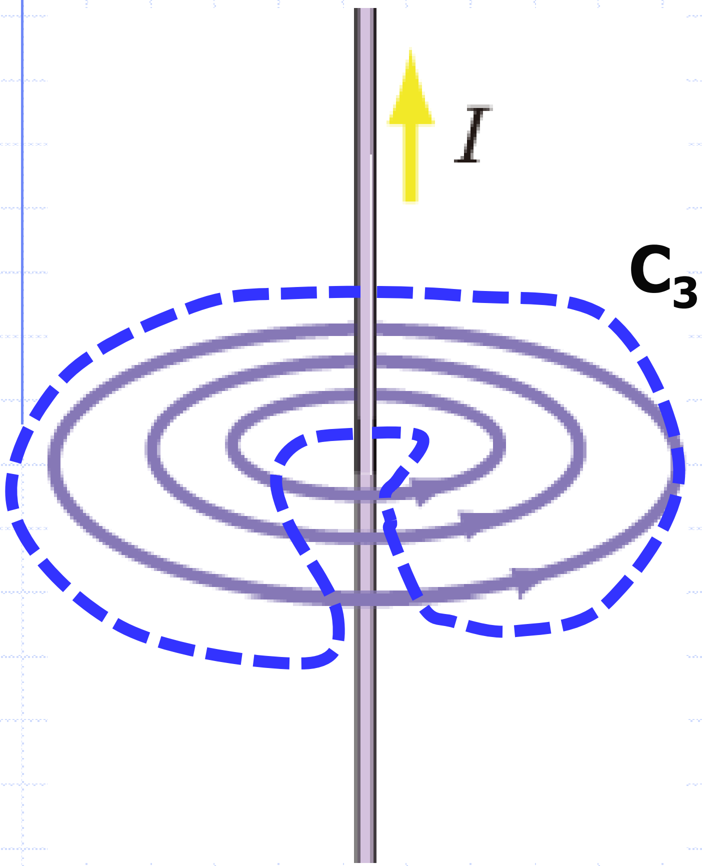
＝

閉じた経路を貫く電流の和に比例

$$\oint_{C_1} B_t ds = \mu_0 I$$

$$\oint_{C_2} B_t ds = \mu_0 I$$

アンペールの法則 (3)



閉じた経路にそって磁場の大きさを積分

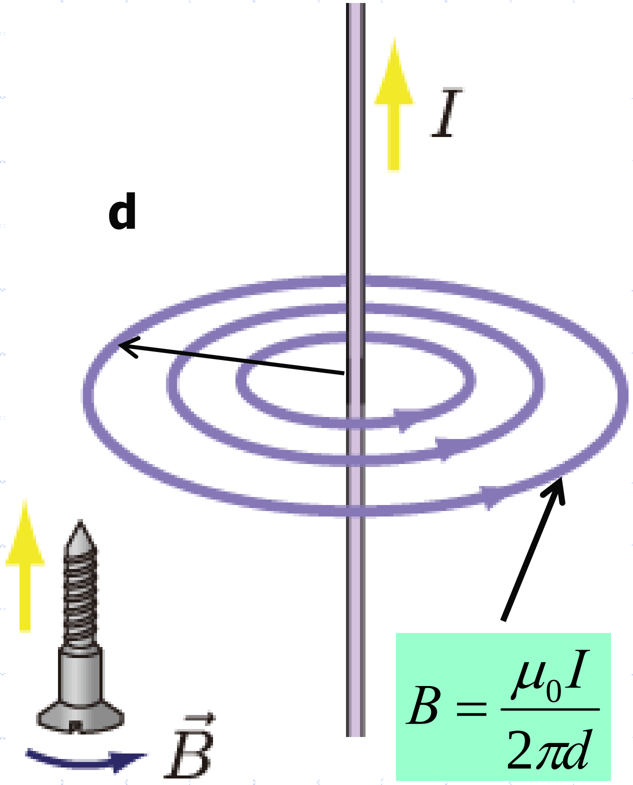
＝

閉じた経路を貫く電流の和に比例

$$\oint_{C_3} B_t ds = 0$$

アンペールの法則　例題1

例　アンペールの法則が成り立つことを確認する



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

半径dのところの磁場Bは $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$

電流を中心とする半径dの円を一周する経路Cの長さは $2\pi d$

よって

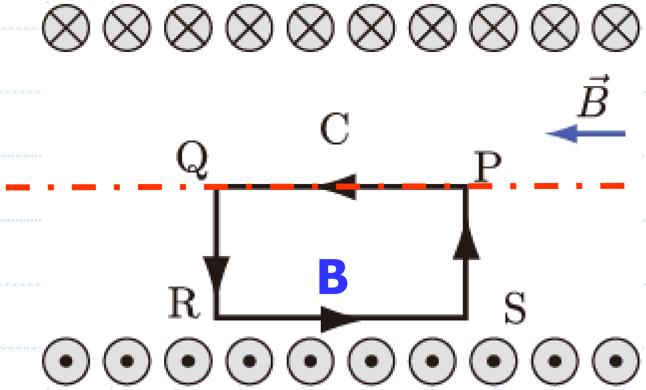
$$\oint_c B_t ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \times (2\pi d)$$

$$= \mu_0 I$$

アンペールの法則　例題2

$$\oint_C B_t ds = \mu_0 I$$

無限長ソレノイドの磁場B

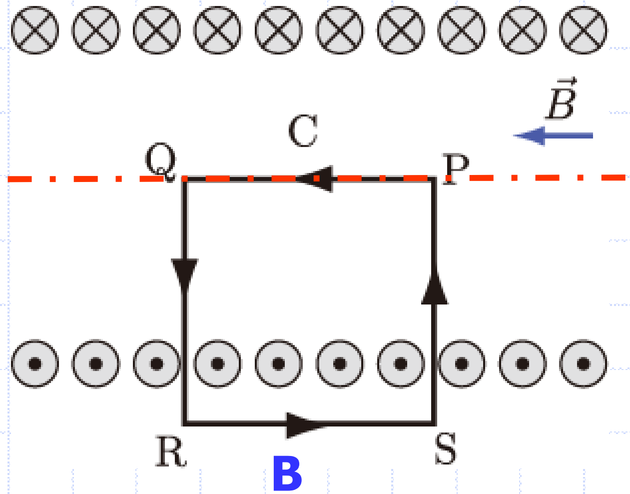


$$\oint_c B_t ds = \mu_0 nI \cdot \overline{PQ} - B \cdot \overline{RS}$$

PQRSを貫く電流は0. 従って

$$\mu_0 nI \cdot \overline{PQ} = B \cdot \overline{RS}$$

$$\therefore B = \mu_0 nI$$



$$\oint_c B_t ds = \mu_0 nI \cdot \overline{PQ} - B \cdot \overline{RS}$$

PQRSを貫く電流はnI・PQ. 従って

$$\mu_0 nI \cdot \overline{PQ} - B \cdot \overline{RS} = \mu_0 nI \cdot \overline{PQ}$$

$$\therefore B = 0$$

附録