

メカトロニクス特論

機械回路のマトリクス解析

電気通信大学 知能機械工学科

下条 誠

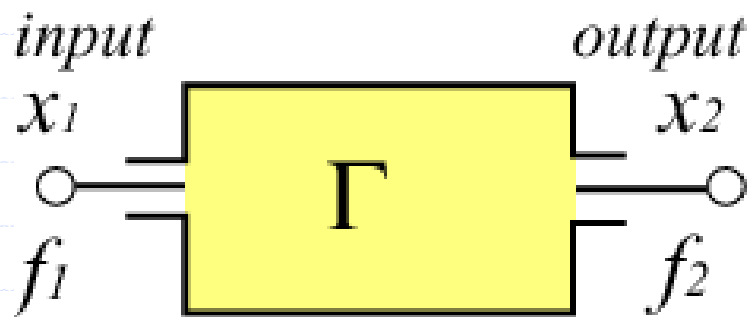
専門: ロボティクス・メカトロニクス 人間工学

はじめに

- これまでに機械系と電気系のアナロジーを用いて、機械システムを電気回路に置き換へ電子回路シミュレータを用いて機械システムのシミュレーションを行った。
- この場合のアナロジーとして、機械系の**”速度と力”**を、電気系の**”電圧と電流”**に対応させたモビリティ法について説明した。
- 本章では、機械系の**”変位と力”**の関係を記述する伝達マトリクスについて説明する。
- この伝達マトリクスは、電気回路の入力端子一対と出力端子一対の2ポート回路(4端子回路ともいう)での解析に相当するものである。

要素のマトリクス表示

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$



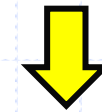
Γ 伝達マトリクス
(Transfer matrix)

モビリティ定義の違い

前章定義:

$$\Delta v = \lambda f$$

速度



本章定義:

$$\Delta x = \lambda_x f$$

変位

変位と力の関係式

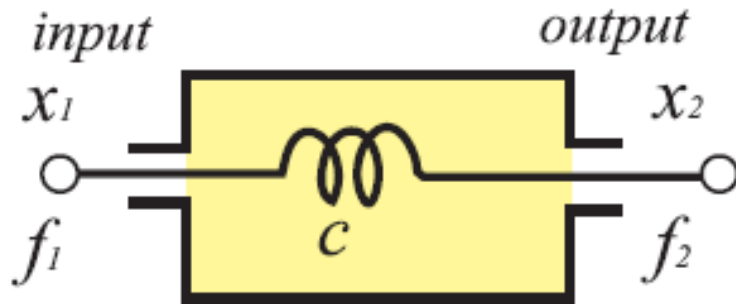
$$\Delta x = \lambda_x f \text{ となる } \lambda_x \text{ を}$$

変位・力系のモビリティと定義する

モビリティ定義の違い(2)

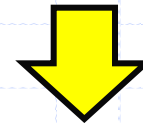
- 電気回路のアナロジーとして機械回路を解析するモビリティ法では、要素の入力端，出力端の速度差 Δv をその要素を通る力 f で除したものとして定義した。
- モビリティ法で速度を用い定義した理由は、電気回路の電圧と電流に対応させるためのものであった。
- このモビリティ法では $f_1 = f_2$ という制限があった。これは要素を流れる流通量(電流など)の連続性から要請される。
- しかし、伝達マトリクス法によれば、 $f_1 \neq f_2$ でよく、モビリティ法より自由度が高い。また本来、機械回路では、速度より変位の方が身近に感じられるため、より自然な考え方で機械回路が解析できるメリットがある。

ばねの伝達マトリクス

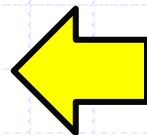


$$x_1 - x_2 = cf_1$$

$$f_1 = f_2$$

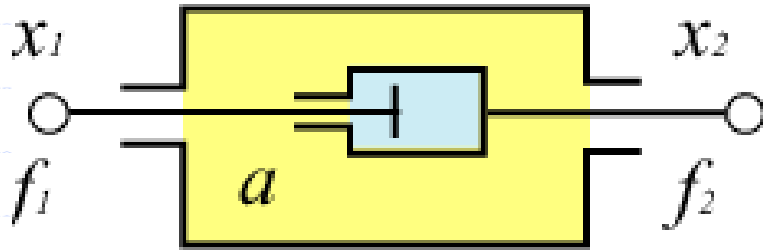


$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



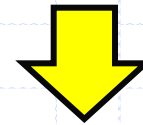
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

ダンパの伝達マトリクス



$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = af_1$$

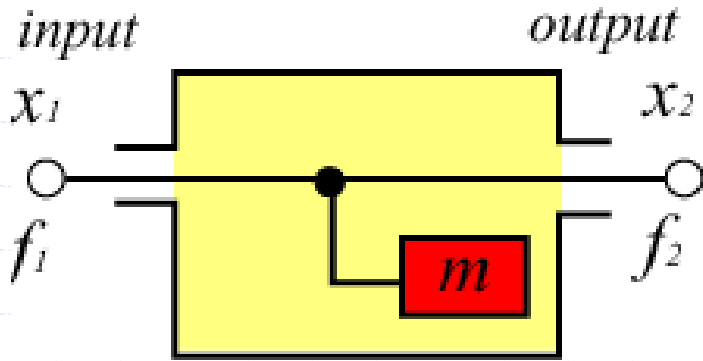
$$f_1 = f_2$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & a/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

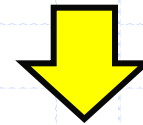
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a/s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

質量の伝達マトリクス

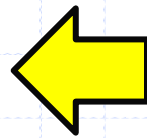


$$x_1 = x_2$$

$$f_1 = m \frac{d^2 x}{dt^2} + f_2$$



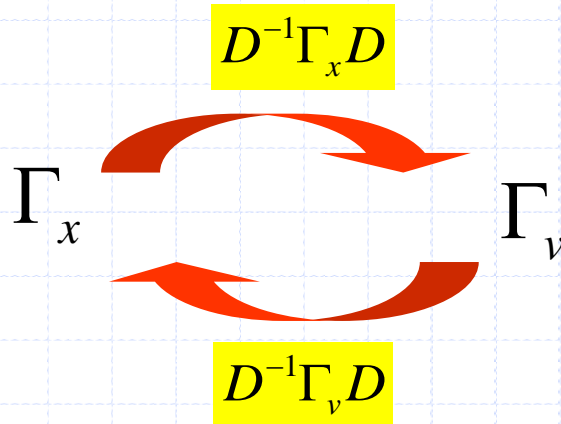
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

変位・力系と速度・力系の伝達マトリクス相互変換 (1)

速度系 → 変位系



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_x \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_x \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D \Gamma_x D^{-1} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変位・力系と速度・力系の伝達マトリクス相互変換 (2)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_x \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_v \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}\Gamma_x D$$

 Γ_x
 Γ_v

$$D\Gamma_v D^{-1}$$

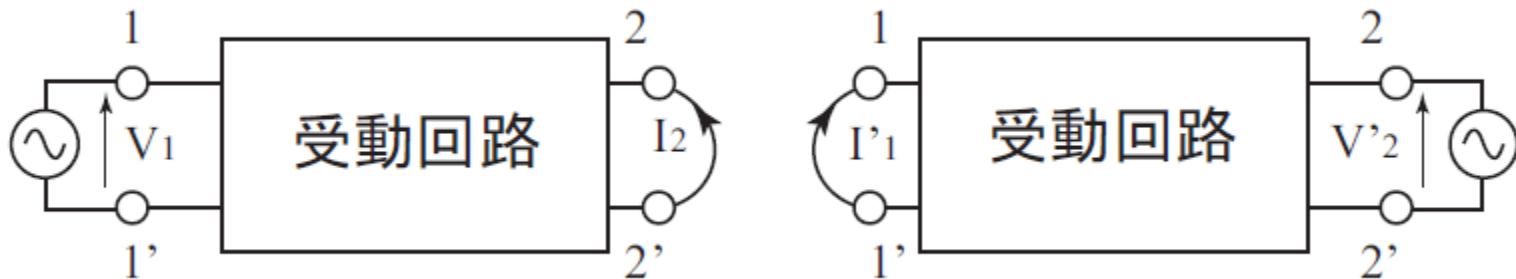
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D^{-1}\Gamma_v D \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = D\Gamma_x D^{-1} \begin{pmatrix} v_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

電気回路の定理を機械回路系へ応用 Maxwell相反定理

回路網内部回路にN対の端子対があり、その時そこに加える電圧電流を $(V_1, V_2, \dots, V_N), (I_1, I_2, \dots, I_N)$ 、および加える電圧電流を変化させたときの $(V'_1, V'_2, \dots, V'_N), (I'_1, I'_2, \dots, I'_N)$ とすると以下の関係がある。

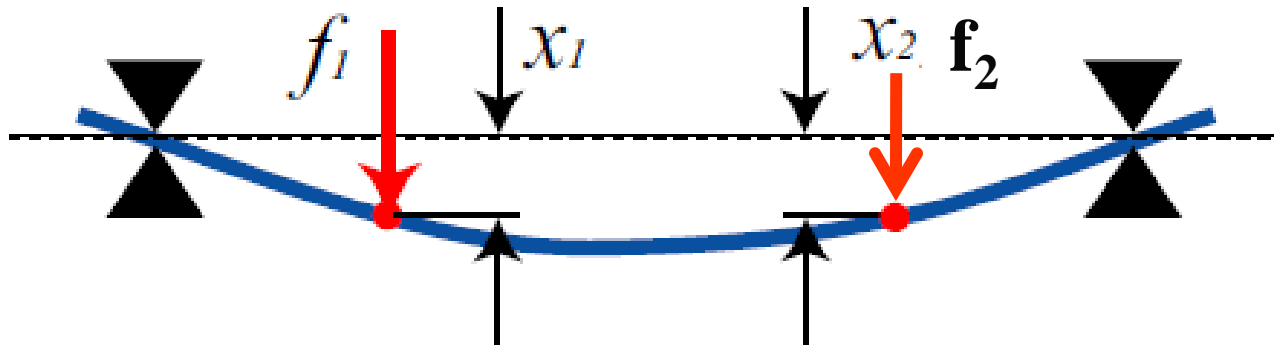
$$\sum_{i=1}^N V_i I'_i = \sum_{i=1}^N V'_i I_i$$



$$V_1 I'_1 = V'_2 I_2$$

Maxwell相反定理 (2)

両端ピン支持の弾性はり



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

伝達マトリクス

Maxwell相反定理 (3)

逆行列を求める

逆行列を求めるとき、この受動的機械回路ではエネルギー源が回路内に存在しないため、その行列式

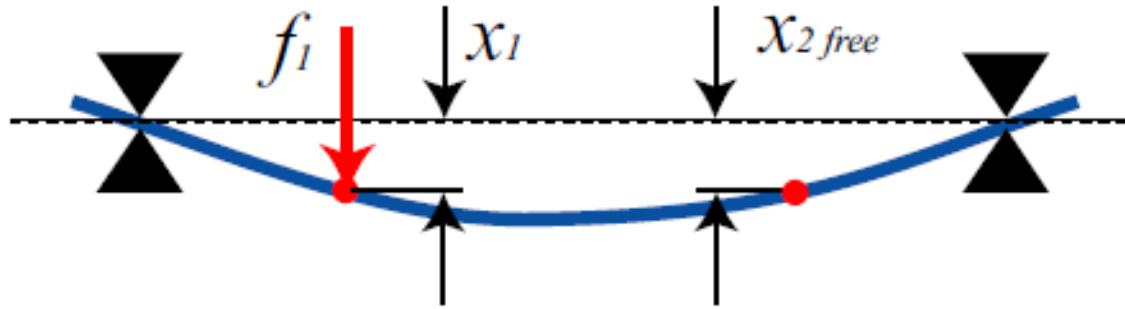
$$\Delta = AD - BC$$

は1となる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

Maxwell相反定理 (4)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

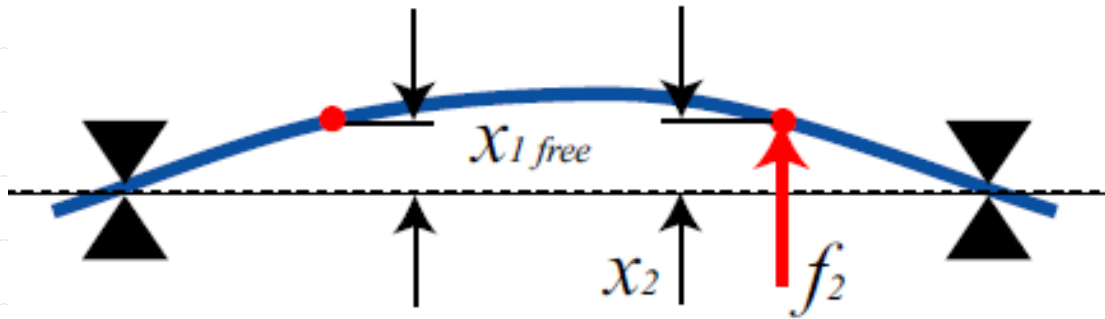


(a) 端子2 無拘束

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2\text{ free}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = C \cdot x_{2\text{ free}}$$

Maxwell相反定理 (5)

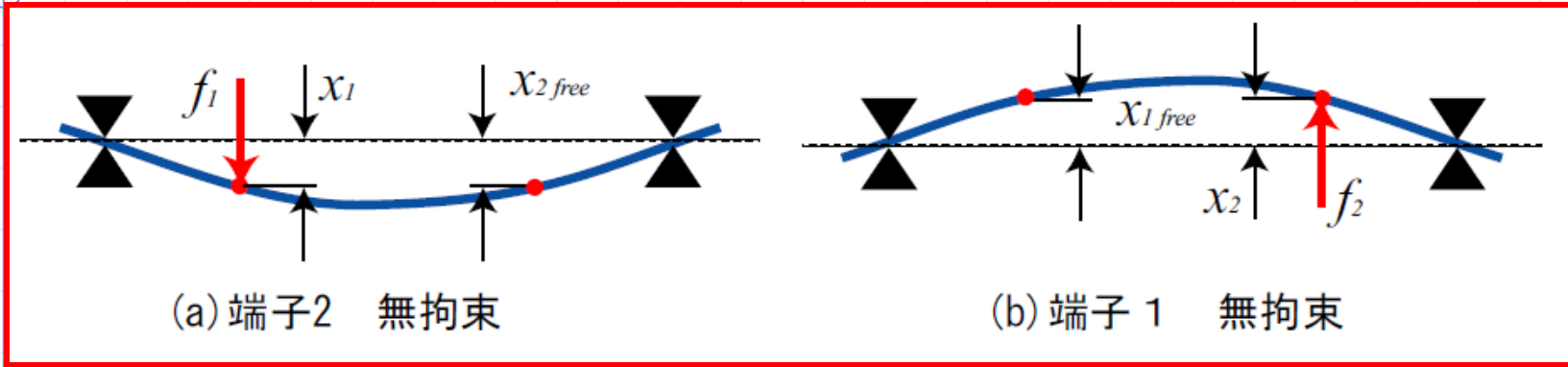
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$$



(b) 端子 1 無拘束

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1\text{free}} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2 = -C \cdot x_{1\text{free}}$$

Maxwell相反定理 (6)

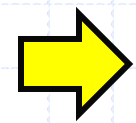


$$f_1 = C \cdot x_{2free}$$

$$f_2 = -C \cdot x_{1free}$$

同等の力f
を加えると

$$f_1 = f_2 \equiv f$$

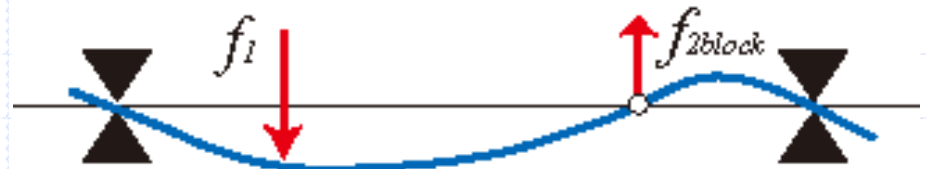


$$x_{1free} = -x_{2free}$$

線形系の入力端に力fを加えたときに出力端に生じる自由変位は、逆に出力端に同じ力fを加えたときに入力端に生じる自由変位に等しくなる

Maxwell相反定理 (7)

同様なことは力についても成立



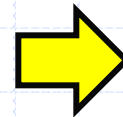
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{2block} \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = B \cdot f_{2block}$$

//////

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{1block} \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -B \cdot f_{1block}$$

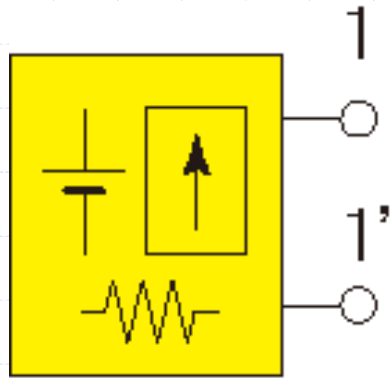
同等の変位 x を加えると

$$x_1 = x_2 \equiv x$$

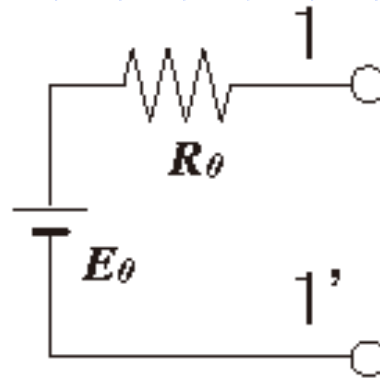


$$f_{1block} = -f_{2block}$$

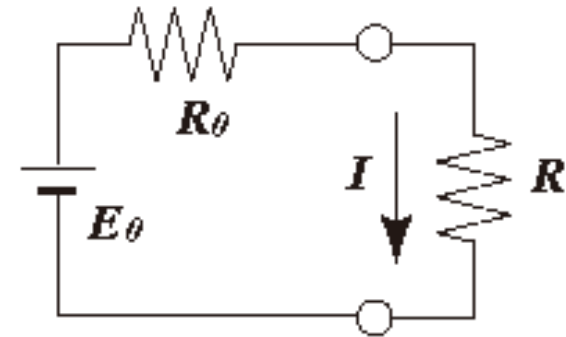
電気回路の定理を機械回路系へ応用 テブナンの定理



(a) 2 端子回路

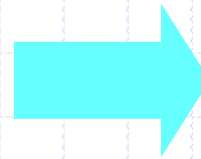


(b) 等価な電圧源



(c) 外部負荷を付ける

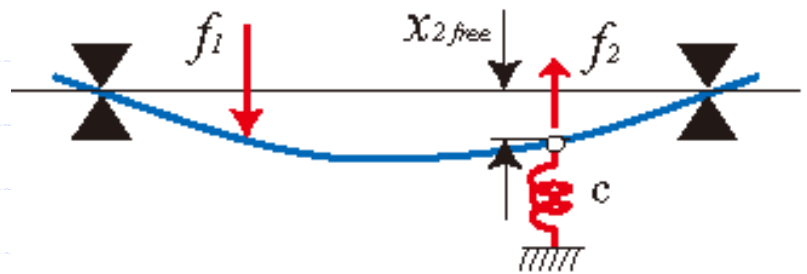
内部に電圧源, 電流源
を含む, どんな複雑な回
路(線形素子から構成)



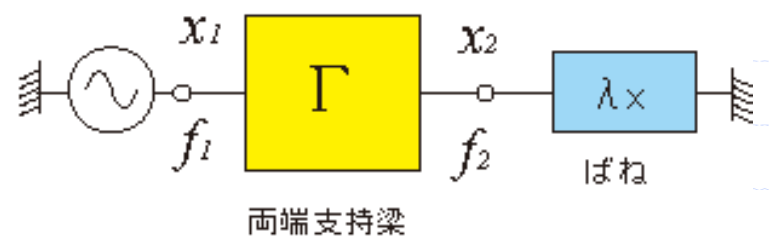
理想電圧源 E_0 と内部抵
抗 R_0 の電圧源としてみ
なすことができる

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R}$$

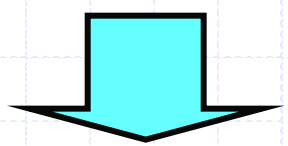
テブナンの定理 (2)



(a) 両端支持梁とばね

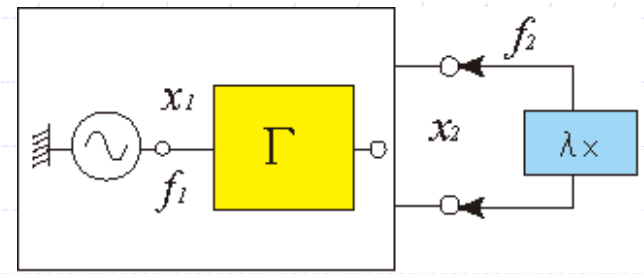
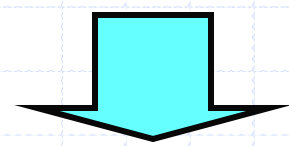


(b) 機械回路モデル



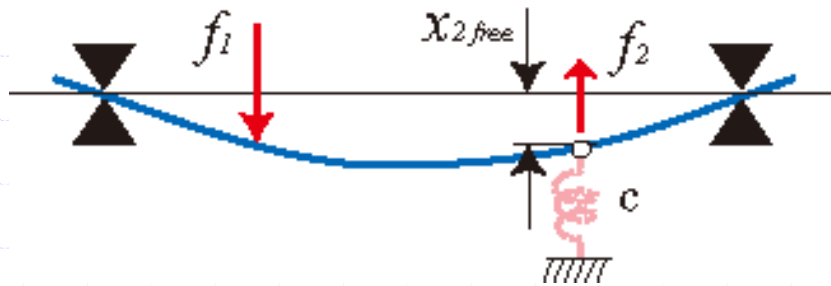
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

マトリクス方程式



機械回路

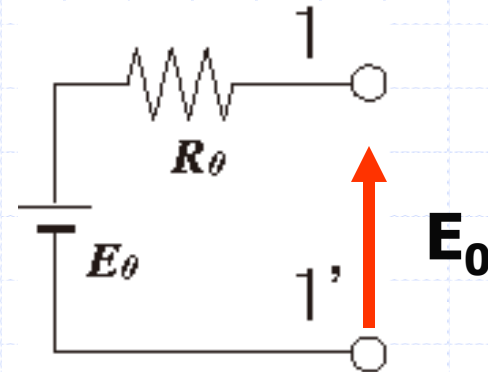
テブナンの定理 (3)



端子(2)OPEN

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,free} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = C x_{2,free} \Rightarrow x_{2,free} = C^{-1} f_1$$

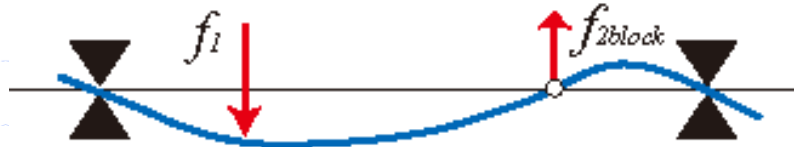


端子OPEN

端子開放電圧

E_0

テブナンの定理 (4)

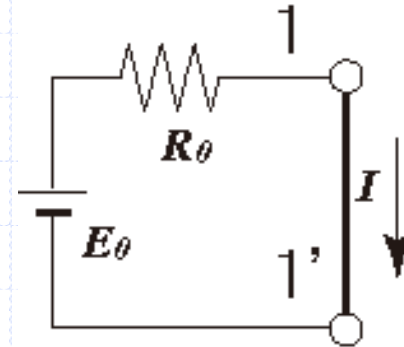


端子close(x2)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{2block} \end{pmatrix}$$

$$f_1 = D f_{2block}$$

$$\Rightarrow f_{2block} = D^{-1} f_1$$

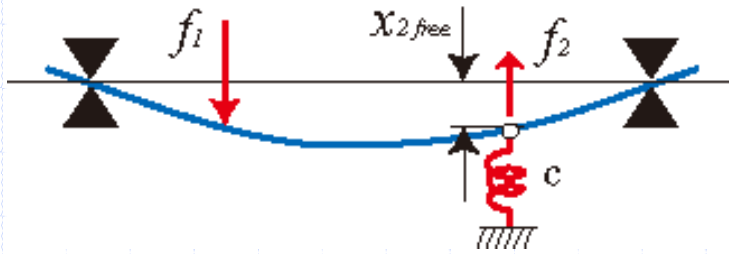
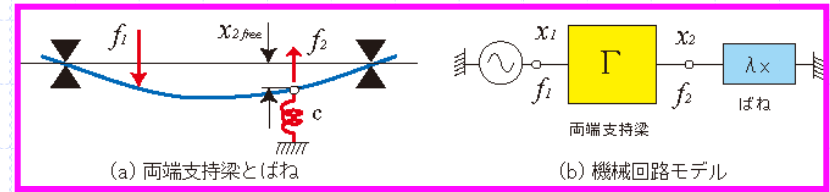


端子close

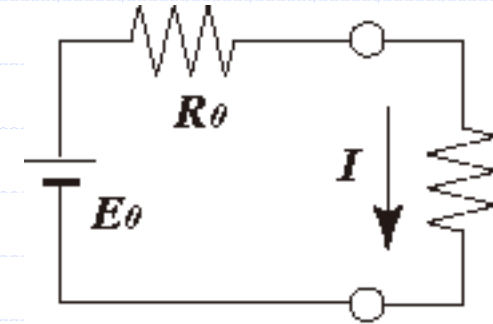
短絡端子電流

$$I_0 = \frac{E_0}{R_0}$$

テブナンの定理 (5)



$$\lambda_0 = \frac{x_{2,free}}{f_{2,block}} = \frac{D}{C}$$



$$R_0 = \frac{E_0}{I_0}$$

端子(2)にばね($\lambda=C$)を挿入

$$f_2 = \frac{x_{2,free}}{\lambda_0 + \lambda} = \frac{Cx_{2,free}}{D + cC} = \frac{f_1}{D + cC}$$

端子に抵抗(R)を挿入

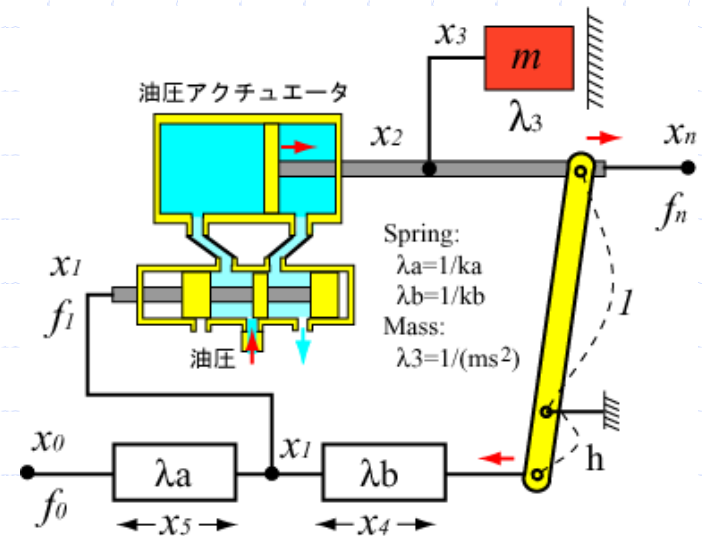
$$I = \frac{E_0}{R_0 + R}$$

一区切り



マトリクス解析法

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

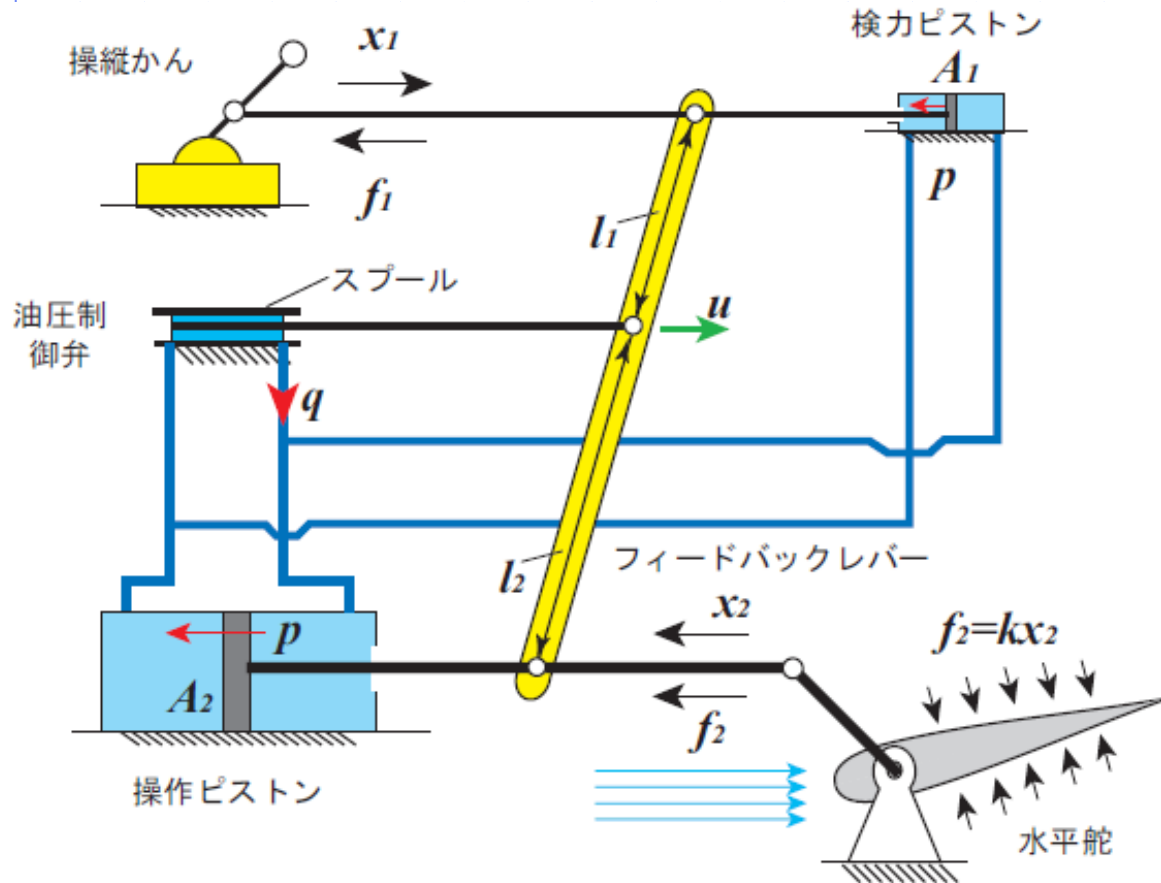


$$f = Zx$$

Z:インピーダンスマトリクス

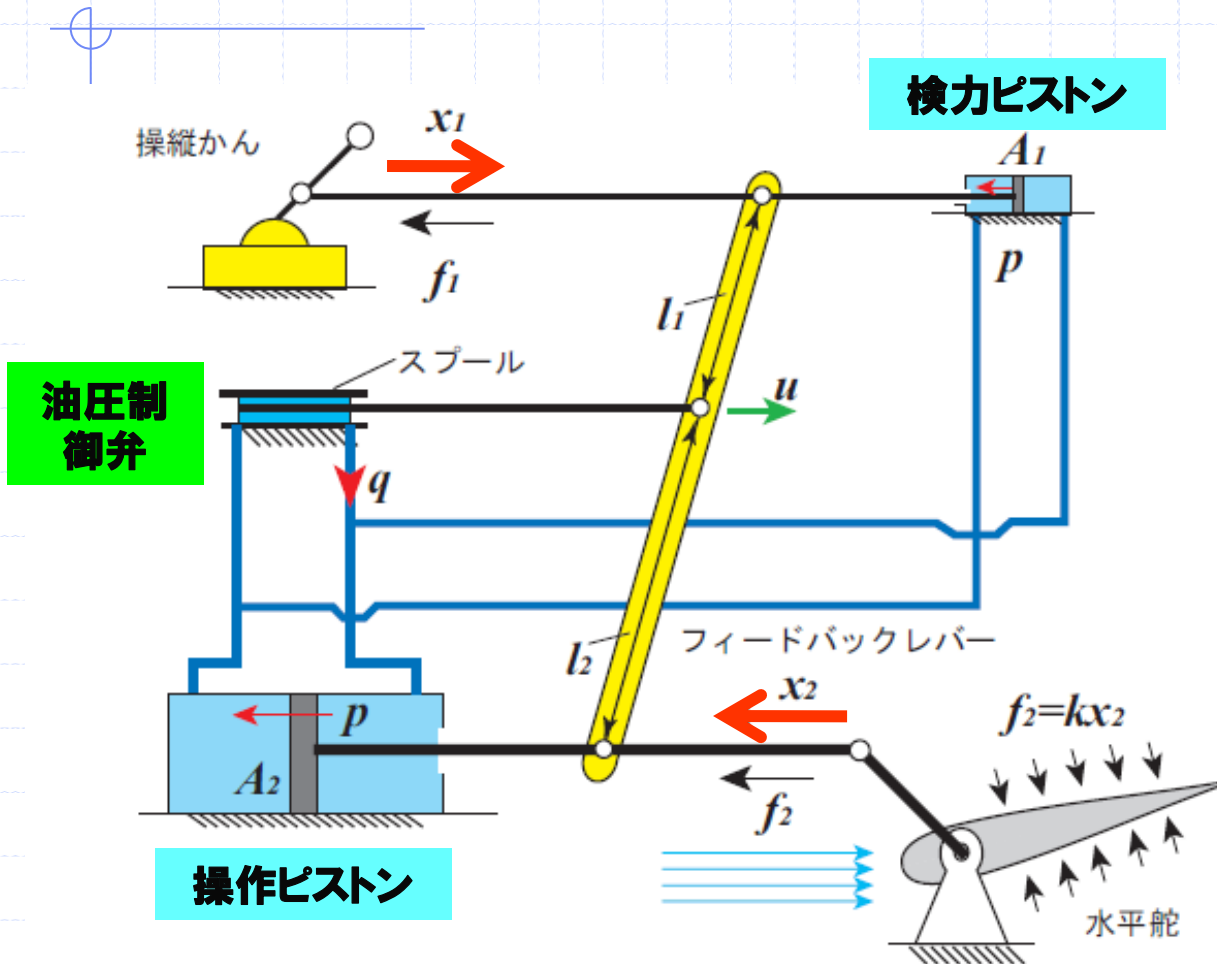
各節点での
力と変位
マトリクス

バイラテラル油圧サーボ機構



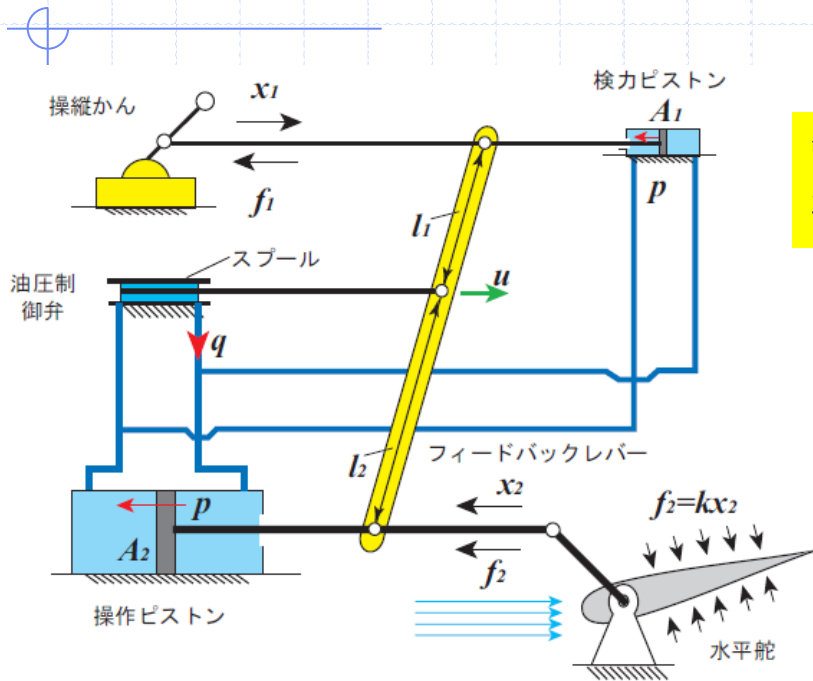
図は操縦桿と水平舵の変位が静的に比例する比例制御を行い、かつ水平舵に作用する空気の反作用力を操縦桿にフィードバックして無理な操縦を行わないようしたバイラテラル油圧サーボ機構を示す

バイラテラル油圧サーボ機構 (1)



- ① 操縦桿を x_1 の方向に引く
- ② 油圧制御弁が開き操作ピストン A_2 を左側に引き、水平舵を反時計回りに回転
- ③ 水平舵による x_2 の変位によってフィードバックレバーを通して制御弁を閉じるように働く。
- ④ ここでもし x_1 が一定ならばそれに比例した x_2 の位置で舵は静止し、いわゆる比例制御が行われる。
- ⑤ その際、操作ピストンに働く油圧 p が検力ピストンにも働き、従って操縦桿にも水平舵に働く空気作用力 f_2 に比例した力 f_1 が伝えられる

バイラテラル油圧サーボ機構 (2)



制御弁のスプール変位を u ，そのポート開度で制御される油流量を q ，操作ピストンに働く油圧は

$$p = au - bq \quad (\text{Table 45})$$

スプールの中性点からの変位 u は，

$$u = mx_1 - nx_2$$

$$m = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, n = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

弁を通る流量 q は

$$q = A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2 \frac{dx_2}{dt}$$

操縦桿に作用する反力 f_1

$$f_1 = A_1 p$$

水平舵に働く空気力 f_2 は

$$f_2 = A_2 p$$

バイラテラル油圧サーボ機構 (3)

以上を用いて $(x_1, x_2), (f_1, f_2)$ の関係を求め

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}$$

式 (8.22) から

$$\begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix}$$

式 (8.23) と式 (8.24) から

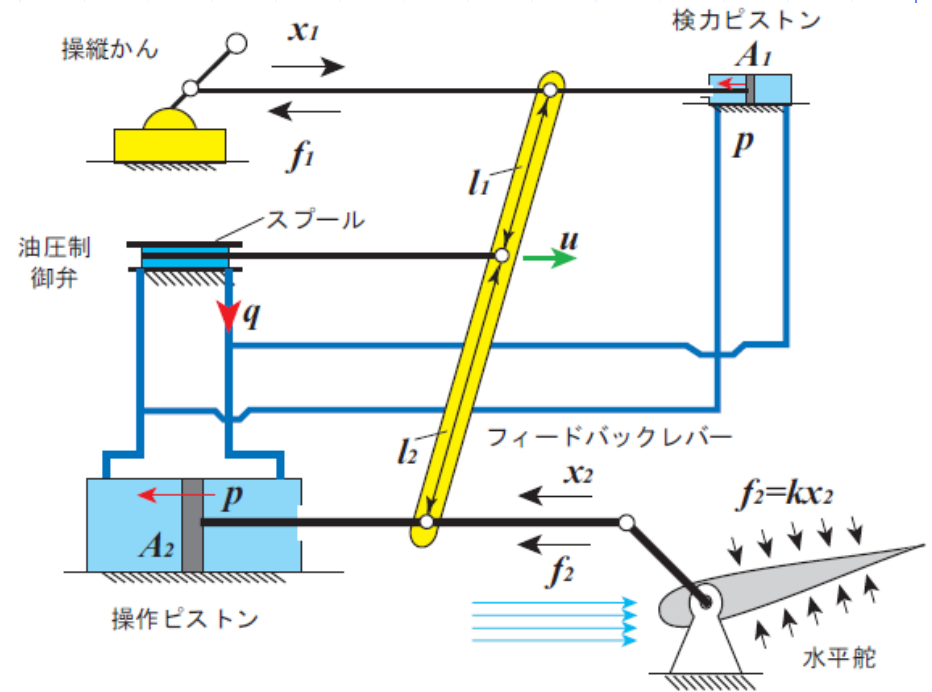
$$\begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -n \\ A_1 s & A_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

以上が得られ、これらを接続すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -n \\ A_1 s & A_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

式 (8.30) のマトリクス部分の乗算を計算すると次の式が得られる。

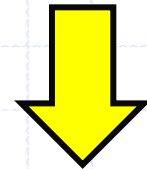
$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(am - A_1bs) & -A_1(an + A_2bs) \\ A_2(am - A_1bs) & -A_2(an + A_2bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



バイラテラル油圧サーボ機構 (3.1)

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(am - A_1bs) & -A_1(an + A_2bs) \\ A_2(am - A_1bs) & -A_2(an + A_2bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

インピーダンスマトリクス: Z

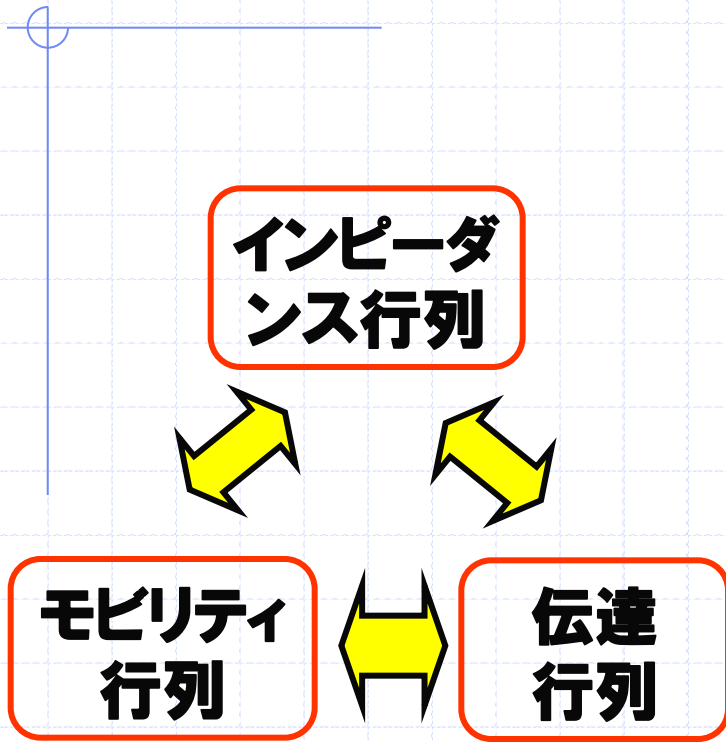


変換公式

伝達マトリクス: Γ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_2(am - A_1bs)} \begin{bmatrix} A_2(an + A_2bs) & 1 \\ 0 & A_1(am - A_1bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

各マトリクスの変換公式



相互変換可能

表 2.3: 各マトリクスの変換公式

インピーダンス・マトリクス

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta_\lambda} \begin{pmatrix} \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} D & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -A \end{pmatrix}$$

$$\Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$$

モビリティ・マトリクス

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta_z} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} A & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -D \end{pmatrix}$$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$$

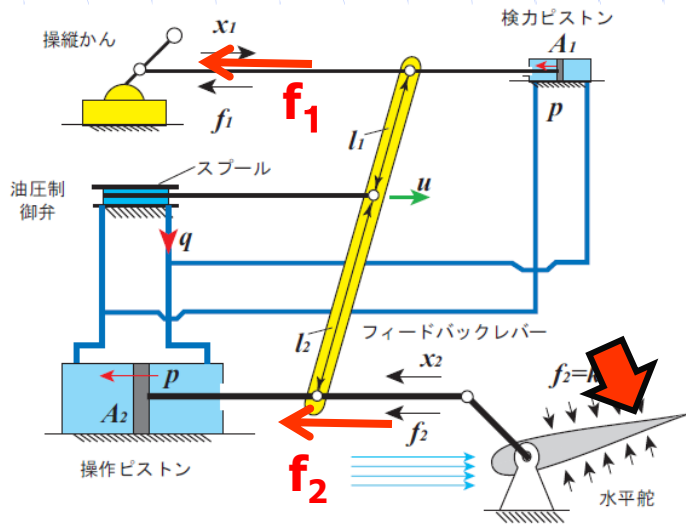
伝達マトリクス

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{z_{21}} \begin{pmatrix} -z_{22} & 1 \\ -\Delta_z & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\lambda_{21}} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\Delta_\lambda \\ 1 & -\lambda_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

バイラテラル油圧サーボ機構 (4)



ある速度で航行する場合、空気力により変位 x_2 、言い換えれば舵角に比例した力 $f_2 = kx_2$ が作用するものとする

$$f_2 = kx_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_2(am - A_1bs)} \begin{bmatrix} A_2(an + A_2bs) & 1 \\ 0 & A_1(am - A_1bs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ kx_2 \end{bmatrix}$$

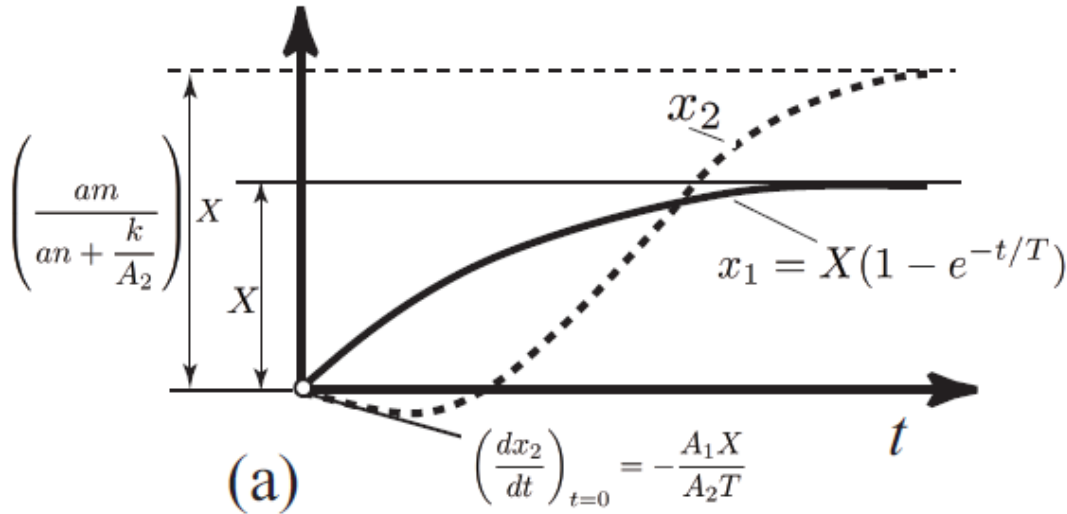
$$x_2 = \left(\frac{am}{an + \frac{k}{A_2}} \right) \frac{1 - T_2s}{1 + T_1s} x_1$$

ここで $T_1 = \frac{A_2b}{an + \frac{k}{A_2}}, T_2 = \frac{A_1b}{am}$

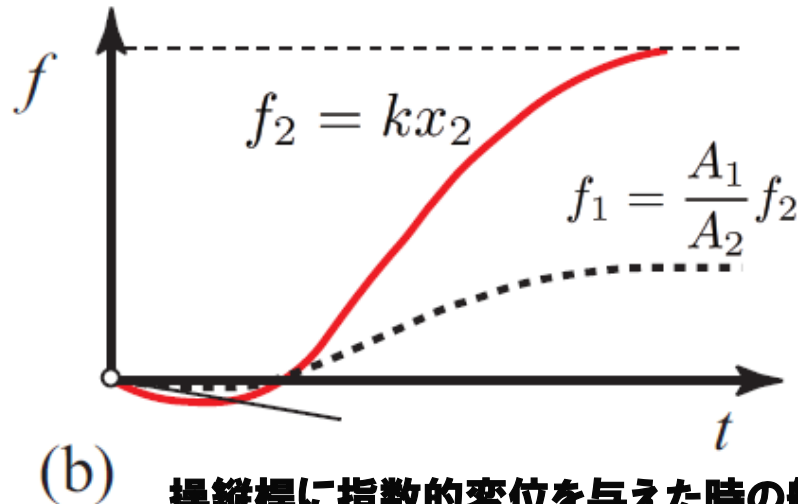
$$f_1 = \frac{A_1}{A_2} f_2$$

操縦桿にフィードバックされる力は舵に働く力の A_1/A_2 に縮小され、操縦者はこの舵に働く力を感じ取る

バイラテラル油圧サーボ機構 (5)



操縦桿に指数的変位を与えた時の舵の変位



操縦桿に指数的変位を与えた時の舵力・操縦桿力の変化

一例として、このようなバイラテラルサーボ操縦桿を操作する時、 x_1 を次のように時間とともに指数関数的に与えた時の動作を求めてみる。

$$x_1 = X(1 - e^{-t/T})$$

一区切り



座標系の変換1(インピーダンスマトリクス)

目的: 不要な変数を消去, 必要な変数に絞る

旧座標系: $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n)^t$

新座標系: $x' = (x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3 \quad \cdots \quad x'_m)^t$

$$x = Cx'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

C: 座標変換マトリクス

新旧インピーダンスマトリクス

$$x = Cx'$$

新座標系では,

$$f' = Z'x'$$

新旧座標系の仕事は等しい

$$W = f'^t x' = f^t x$$

変換マトリクスCを用いて

$$W = f'^t x' = f^t x = f^t Cx'$$

$$\Rightarrow f'^t = f^t C$$

転置行列を取ると

$$f' = C^t f$$

旧インピーダンスマトリクスを
新インピーダンスマトリクス
への変換は

$$f' = C^t f = C^t Zx = C^t ZCx'$$

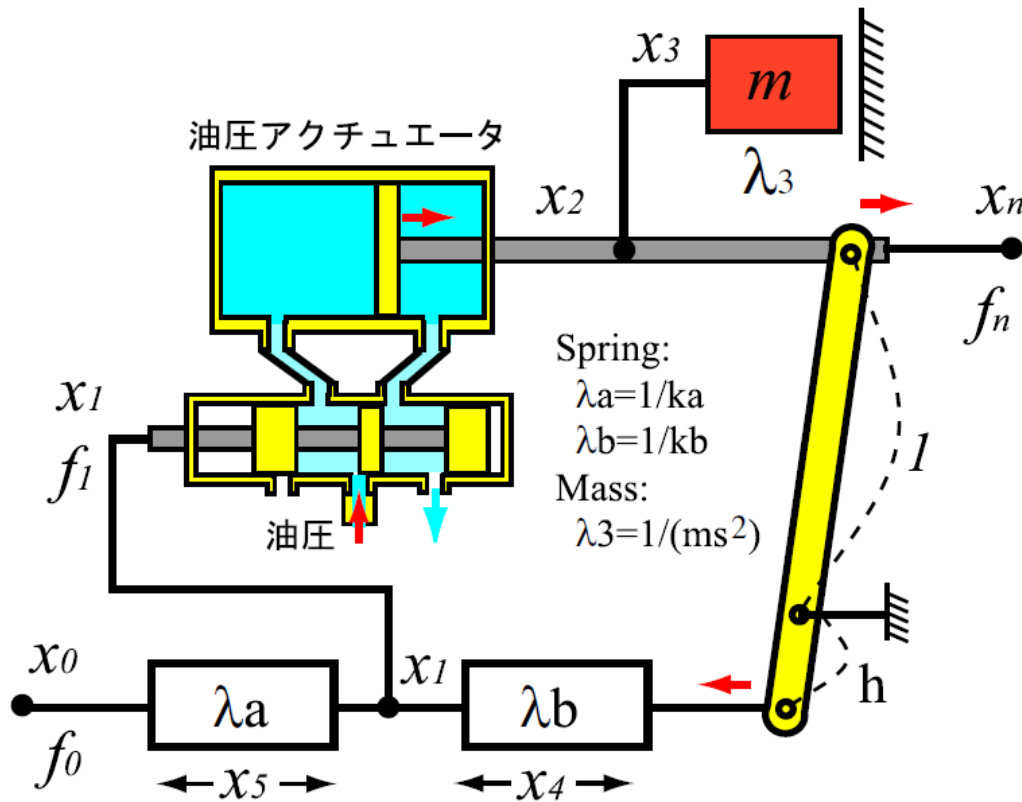
$$\Rightarrow Z' = C^t ZC$$

座標系の変換2(インピーダンスマトリクス)

表 2.1: 新旧座標系の関係 (インピーダンスマトリクス)

新座標系		旧座標系
	\mathbf{C}	
\mathbf{x}'	\Rightarrow	\mathbf{x}
$\mathbf{Z}' \Downarrow$		$\mathbf{Z} \Downarrow$
	\mathbf{C}^t	
$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}' \mathbf{x}'$	\Leftarrow	$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$
$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C}$		

機械回路解析 1



$$x_1 = \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

$$x_2 = x_3 = x_n$$

$$x_4 = -x_1 - h x_n$$

$$= -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

$$x_5 = x_1 - x_0$$

$$= -\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

機械回路解析2

変換マトリクスCを求める

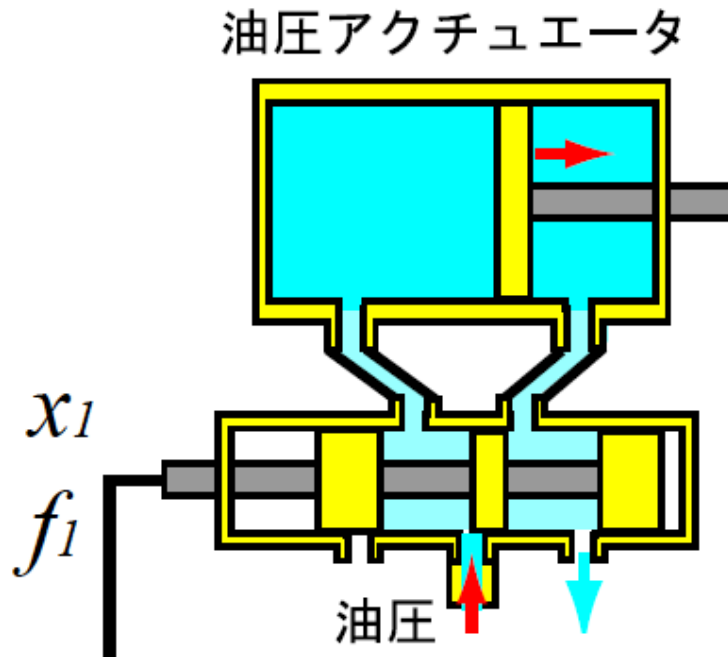
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{\lambda_a + \lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{\lambda_a + \lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

式をマトリクス表示すると

$$x = Cx'$$

これより変換マトリクスCは

機械回路解析3



油圧サーボのインピーダンス
マトリクス

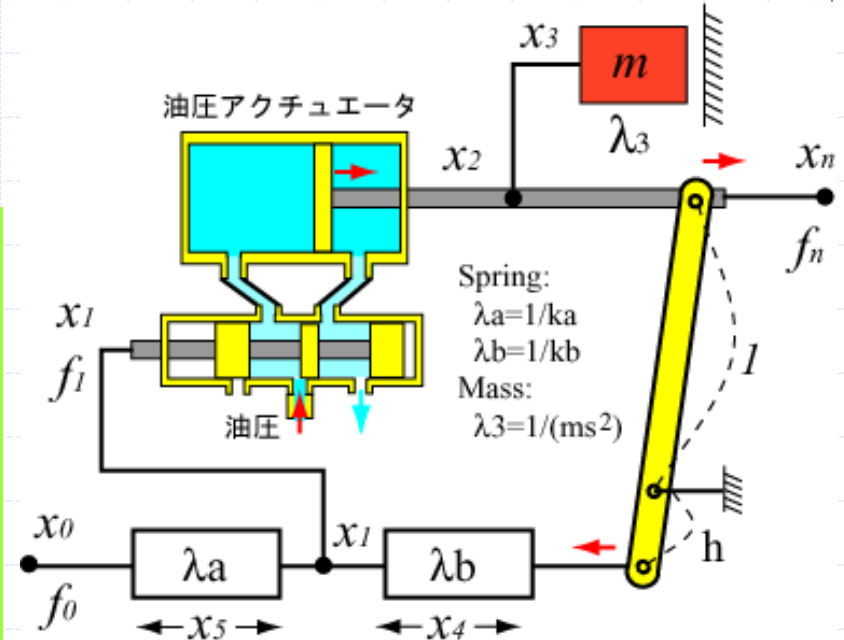
(テキストP103)

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -bs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

機械回路解析4

機械回路の運動方程式

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -bs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$



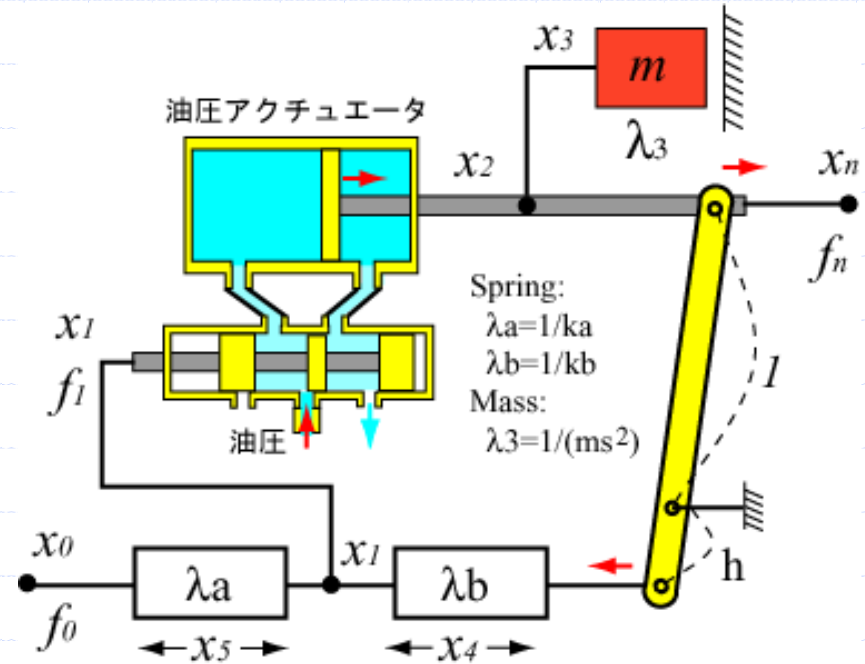
ここで
新座標系で
表現する

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

機械回路解析5

入出力のインピーダンス マトリクス

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{a\lambda_b - h}{\lambda_a + \lambda_b} & \left\{ \frac{h(a\lambda_a + h)}{\lambda_a + \lambda_b} + bs + \frac{1}{\lambda_3} \right\} \end{pmatrix}$$

機械回路解析6

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

インピーダンスマトリクス

伝達マトリクス

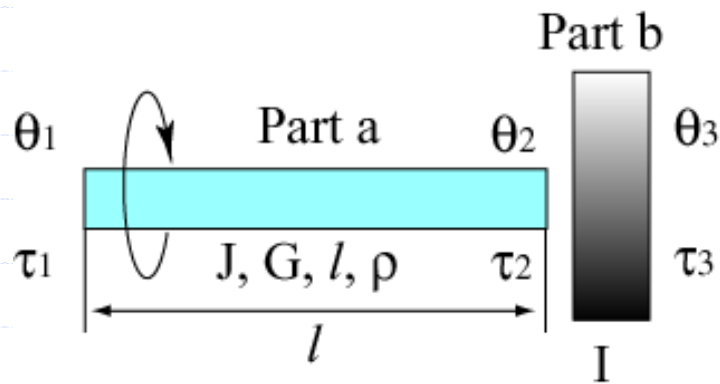
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h(a + hk_a)k_b + (bs + ms^2)(k_a + k_b)}{(a - hk_b)k_a} & \frac{k_a + k_b}{(a - hk_a)k_b} \\ -\frac{(ah + bs + ms^2)k_b}{a - hk_b} & -\frac{k_a + k_b}{(a - hk_b)k_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

一区切り

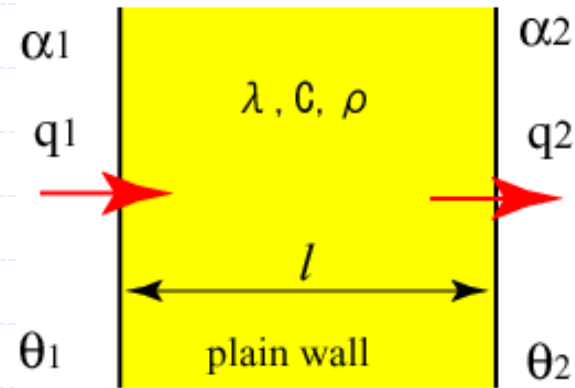


線形連続体の伝達マトリクス

伝達マトリクスは、力と変位の入力／出力の変換マトリクスとして表現した。この入出力関係は”ばね，ダンパ，質量”の個別要素だけでなく，弾性梁，熱伝導などの連続体についても求められる。



慣性体つきねじり軸

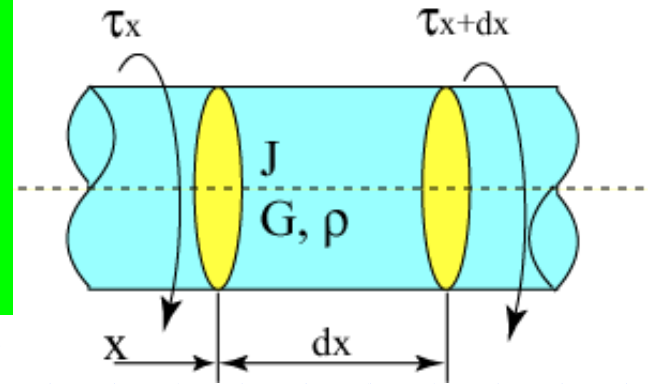


放熱・吸熱を考慮した場合の伝熱問題

熱伝達

慣性体つきねじり軸1

タービン船などのプロペラシャフト軸は相当重く、軸のねじり剛性のみでなく分布質量も考慮する必要がある。
 (1)プロペラ軸の伝達マトリクス



J:断面2次極モーメント

基礎方程式

$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx = J\rho dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

一般解

$$\theta = a \sinh vx + b \cosh vx \Rightarrow a = const, b = const, v = s \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

境界条件

$$x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_1, \tau = \tau_1, \quad x = l \Rightarrow \theta = \theta_2, \tau = \tau_2$$

伝達マトリクス

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh vl & \frac{\sinh vl}{J\sqrt{\rho G} s} \\ J\sqrt{\rho G} s \sinh vl & \cosh vl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

慣性体つきねじり軸2

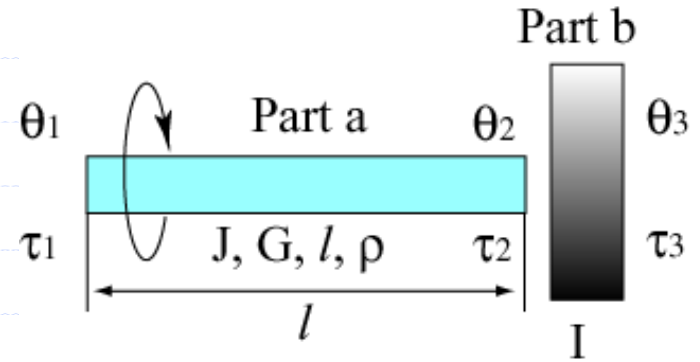
振動現象とすると



$$s = j\omega$$

変数を置き換えると

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu l & \frac{\sin \mu l}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$



弾性シャフト+慣性体 問題

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} &= \Gamma_{shaft} \Gamma_{rotor} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu l & \frac{\sin \mu l}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l & \frac{\sin \mu l}{GJ\mu} \\ -(GJ\mu \sin \mu l + \omega^2 I \cos \mu l) & \cos \mu l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

慣性体つきねじり軸3

固有振動 $\theta_1 = 0, \tau_3 = 0$

$$0 = \left(\cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l \right) \theta_2 + 0$$

$$\Rightarrow \tan \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} l = \frac{J\sqrt{G\rho}}{I} \frac{1}{\omega}$$

**Tan曲線と双曲線の
交点から固有振動数
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$ と求
めることができる**

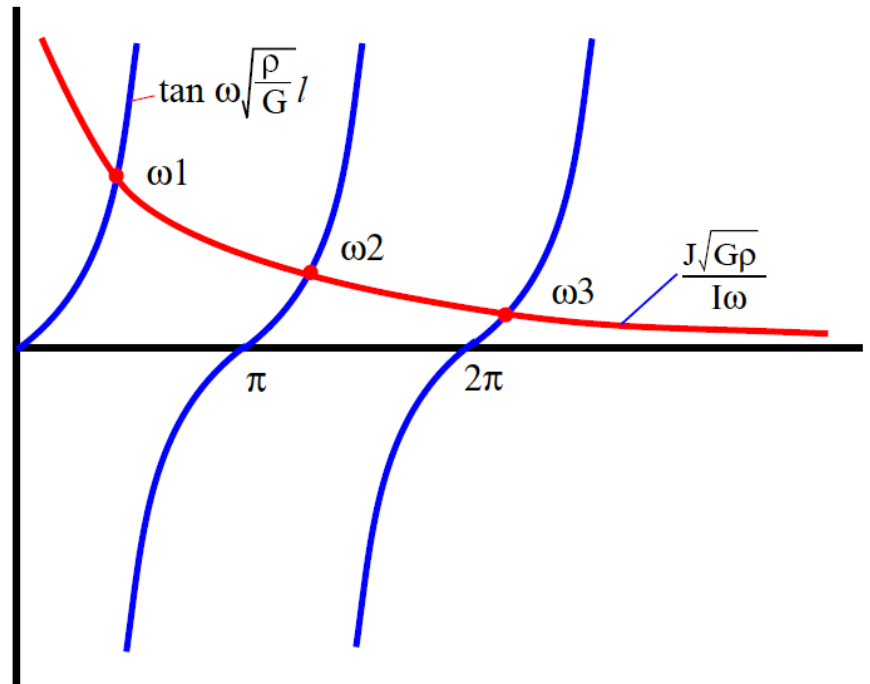
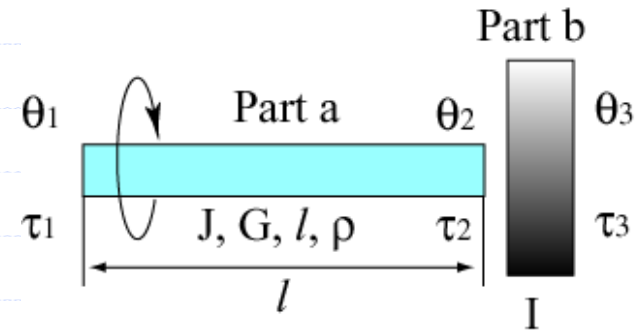


図 2.14: 固有振動数の解法

慣性体つきねじり軸4

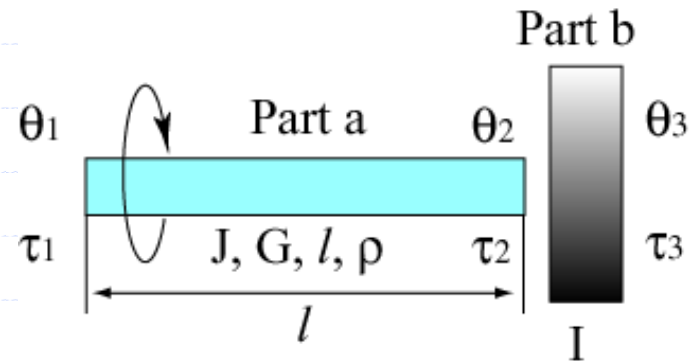
強制振動

$$\theta_1 = \Theta_1 e^{j\omega t}, \tau_3 = 0$$

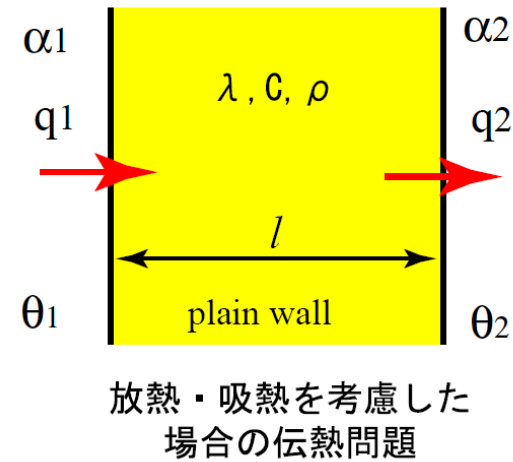
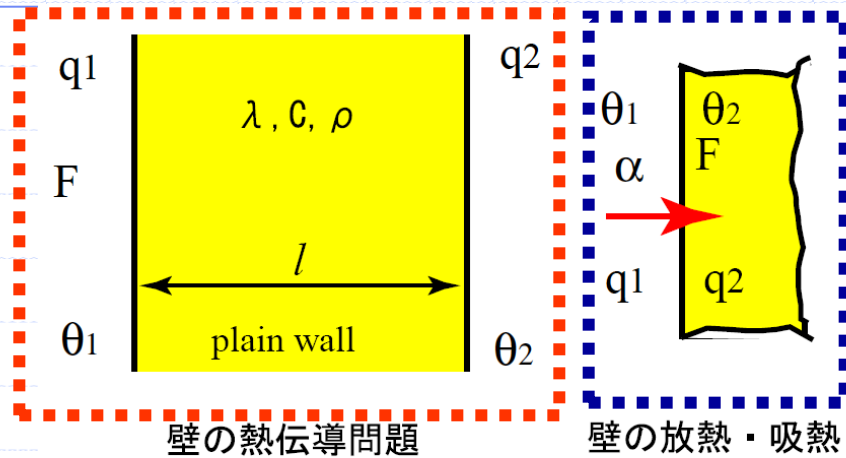
$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_3 = \frac{1}{A} \theta_1, \tau_1 = C \theta_3 = \frac{C}{A} \theta_1$$

$$\theta_3 = \frac{\Theta_1}{\cos \mu l - \frac{\omega^2 I}{GJ\mu} \sin \mu l} e^{j\omega t}$$

$$\tau_1 = \frac{\omega^2 I \cos \mu l + \omega J \sqrt{G\rho} \tan \mu l}{1 - \frac{\omega I}{J \sqrt{G\rho}} \tan \mu l}$$



熱伝導問題 (1)

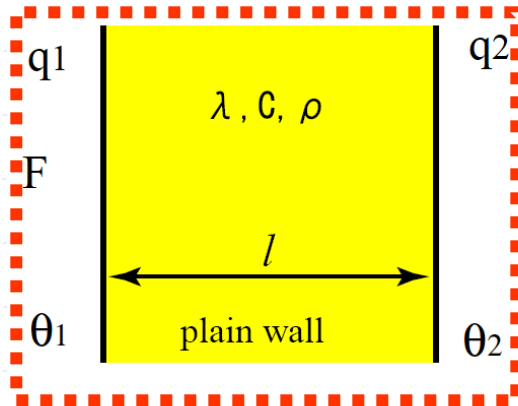


$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad q = \alpha F (\theta_1 - \theta_2)$$

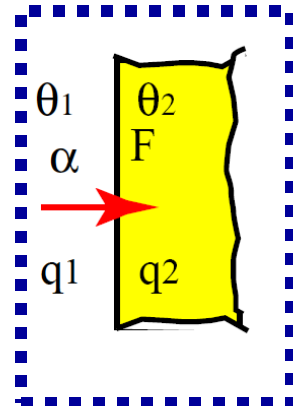
$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

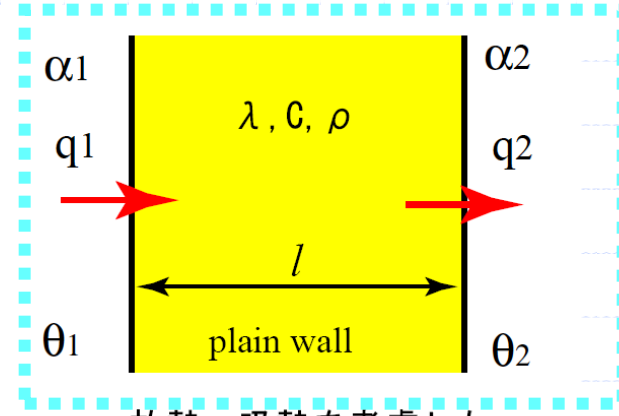
熱伝導問題 (2)



壁の熱伝導問題



壁の放熱・吸熱



放熱・吸熱を考慮した場合の伝熱問題

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l \\ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}} l}{\lambda F \sqrt{\frac{s}{a}}} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

電気要素

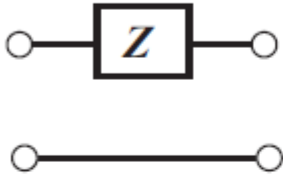
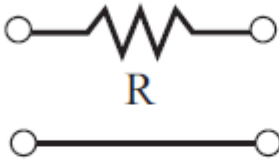
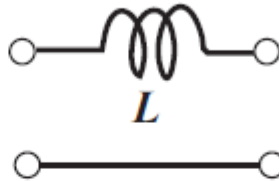
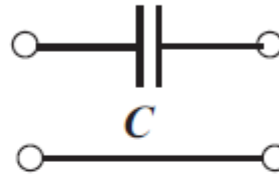
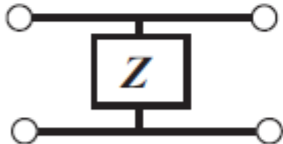
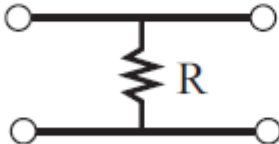
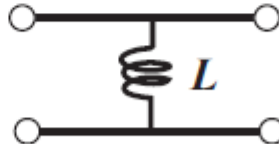
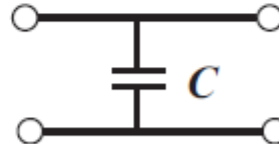
インピーダンス	レジスタンス	インダクタンス	キャパシタンス
(1) 	(2) 	(3) 	(4) 
$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & sL \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(5) 	(6) 	(7) 	(8) 
$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{sL} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC & 1 \end{bmatrix}$

図 10.1: 電気系における伝達マトリクス

並進系(機械要素)

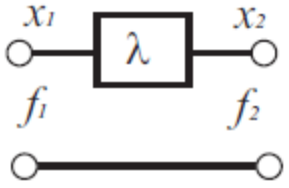
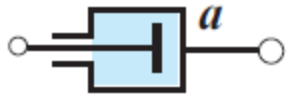
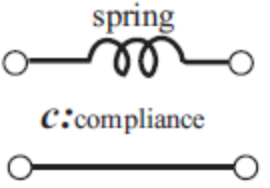
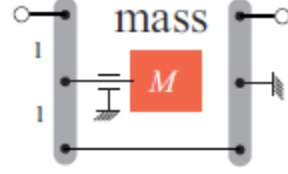
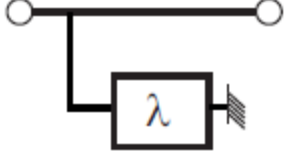
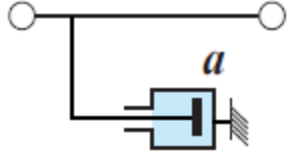
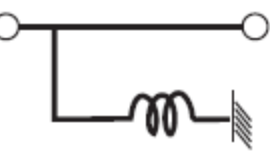
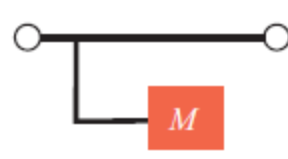
インピーダンス	粘弾性	バネ	質量
<p>(9)</p> 	<p>(10)</p> 	<p>(11)</p> 	<p>(12)</p> 
$\begin{bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{as} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{Ms^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>(13)</p> 	<p>(14)</p> 	<p>(15)</p> 	<p>(16)</p> 
$\begin{bmatrix} X_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ as & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C^{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Ms^2 & 1 \end{bmatrix}$

図 10.2: 機械系における伝達マトリクス

回転体

インピーダンス	粘弾性	バネ	慣性
(17) 	(18) 	(19) 	(20)
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{as} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2}{z_1} & \frac{z_3}{z_1 I s^2} \\ 0 & \frac{z_1}{z_1 + z_2} \end{bmatrix}$
(21) 	(22) 	(23) 	(24)
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ as & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C^{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I s^2 & 1 \end{bmatrix}$

図 10.3: 回転機械系における伝達マトリクス

機械要素その他

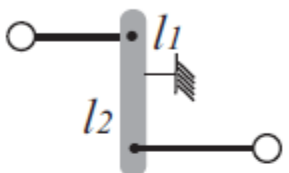
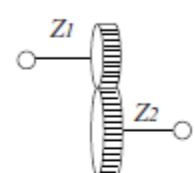
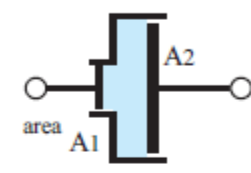
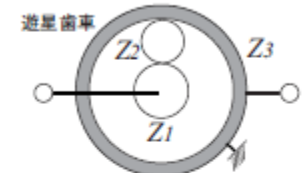
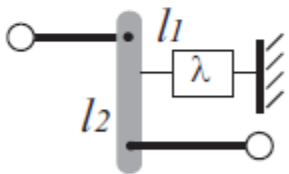
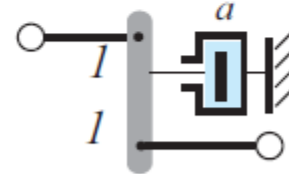
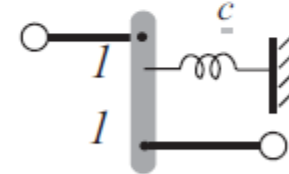
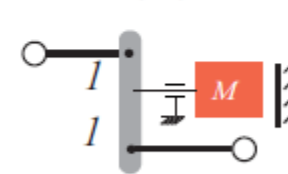
インピーダンス			
<p>(25)</p> 	<p>(26)</p> 	<p>(27)</p> 	<p>(28)</p> 
$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{z_2}{z_1} & 0 \\ 0 & -\frac{z_1}{z_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_2}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{A_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{z_1 + z_2}{z_1} & 0 \\ 0 & \frac{z_1}{z_1 + z_2} \end{bmatrix}$
<p>(29)</p> 	<p>(30)</p> 	<p>(31)</p> 	<p>(32)</p> 
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{l_2} & \lambda \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \\ 0 & -\frac{l_2}{l_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{as} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -4c \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{Ms^2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

図 10.4: その他機械系における伝達マトリクス

連続系要素



(33) heavy torsion shaft sinusoidal input	(34) vibration beam
<p>heavy torsion shaft sinusoidal input</p> $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$  $\mu = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$	<p>vibration beam</p> $\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = \frac{s\rho}{IE} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$  $\mu = \sqrt{\omega} \left(\frac{s\rho}{EI} \right)^{1/4}$
$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\mu l & \frac{1}{GJ\mu} \\ -GJ\mu \sin\mu l & \cos\mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\cosh\mu l + \cos\mu l} \begin{bmatrix} \cosh\mu l \cos\mu l & -\frac{j\omega}{El\mu^3} \alpha \\ \frac{El\mu^3}{j\omega} \alpha & 2\cosh\mu l \cos\mu l \end{bmatrix}$ $\alpha = (\sinh\mu l \cos\mu l - \cosh\mu l \sin\mu l)$

図 10.5: 連続系における伝達マトリクス (梁)

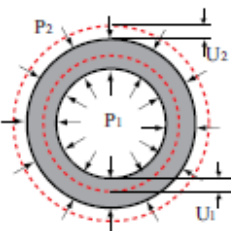
	(35) thick cylinder under radial stress
	$\begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k} \left(k^2 + 1 + \frac{(k^2 - 1)}{\nu} \right) & \frac{(k^2 - 1)}{4\pi k E} \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) \\ \frac{\pi}{k} (k^2 - 1) E & \frac{1}{2k} \left(k^2 + 1 - \frac{(k^2 - 1)}{\nu} \right) \end{bmatrix}$ <p>P_1, P_2 : total pressure on the surfaces per unit axial length. $k = (r_2/r_1)$ r_1 : inner radius, r_2 outer radius, E : young's modulus, ν : poisson's number</p>

図 10.6: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱)

熱伝導

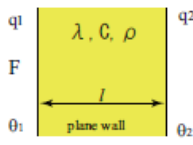
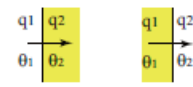
 <p> $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ $q_1 = -\lambda F \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_1$ $q_2 = -\lambda F \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_2$ </p>	<p>(36) conduction of heat ; plane wall</p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{l}{a} & \lambda F \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{l}{a} \\ \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{l}{a} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} \frac{l}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{\lambda F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: right;">steady state</p> <p>λ : conductivity C : capacity F : area, $s = \frac{\partial}{\partial t}$</p>
<p>(37)</p>  <p>F : area</p>	$\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{\alpha F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p>α : heat transmission constant</p>

図 10.7: 連続系における伝達マトリクス (壁の熱伝導)

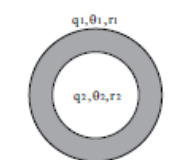
 <p> $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ $\mu = \sqrt{\frac{s}{a}}$ for steady state </p>	<p>(38) conduction of heat; hollow cylinder</p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \frac{s}{a} U_1(r_1, r_2) & 2\pi \lambda l \frac{1 - \frac{s}{a} r_1 r_2 U_1(r_1, r_2) U_1(r_2, r_2)}{U_0(r_2, r_1)} \\ -\frac{U_0(r_2, r_1)}{2\pi \lambda l} & r_2 \sqrt{\frac{s}{a}} U_1(r_1, r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ <p> $U_0(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_0(\mu r_n) - I_0(\mu r_m) K_0(\mu r_n)$ $U_1(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_1(\mu r_n) - I_0(\mu r_m) K_1(\mu r_n)$ </p> $\begin{bmatrix} q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\log \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \lambda l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

図 10.8: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱熱伝導)

熱伝導


(39) flow in thin tube	
	$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} & b \frac{s}{a} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}} \\ \frac{\sinh \sqrt{\frac{s}{a}}}{b \frac{s}{a}} & \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix}$
$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{32\nu}{d^2} \frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ $\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{c^2 \rho}{F} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4}$	$a = \frac{\gamma P_0 d^2}{32\mu}, \quad b = \frac{\pi P_0 d^4}{32\mu}$
<p>$\nu = \mu/\rho$ kinematic viscosity</p> <p>$c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ sound velocity</p>	<p>μ : viscosity, γ : exponent of polytropic change</p> <p>p_0 : mean pressure, q : flow cc/s</p>

図 10.9: 連続系における伝達マトリクス (圧肉円柱熱伝導)

油圧系



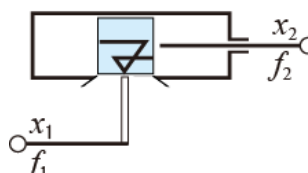
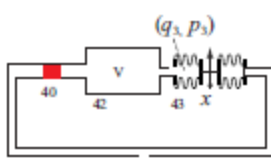
hydraulic power actuator	servo-actuator	follow-up servo(proportional)	differential action
<p>(44)</p>  $Ap_1 - f_2 = b \frac{dx_2}{dt}$	 $f_2 = ax_1 - b \frac{dx_2}{dt}$ $f_2 = ax_1 - b \frac{dx_2}{dt}$	 $f_2 = a(X_1 - X_2) - b \frac{dX_2}{dt}$ $f_2 = a(X_1 - X_2) - b \frac{dX_2}{dt}$	<p>(47)</p>  $x = a(p_1 - p_2)$
$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{b}{A}s & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$ <p>A : piston area b : resistance constant</p>	$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{a}s & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$ $x_2 \approx \frac{a}{b} \int x_1 dt$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{b}{a}s & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & as \\ k & k\alpha s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ f_3 \end{bmatrix}$ $\alpha = \frac{V}{\gamma RT}$ $x = \frac{as}{s + \frac{1}{k\alpha}} \approx k\alpha a \frac{dp_1}{dt}$

図 10.10: 油圧系における伝達マトリクス

INPUT	a	b	c	d	OUT-PUT
voltage $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & sL \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	voltage $\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$
current $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	current $\begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$
disp. $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	disp. $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$
force $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	force $\begin{bmatrix} \theta_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$
angle $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	angle $\begin{bmatrix} \theta_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$
torque $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$	torque $\begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} \theta_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$
heavy torsional shaft sinusoidal input $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ $\mu = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu l & \frac{1}{GJ\mu} \sin \mu l \\ -GJ\mu \sin \mu l & \cos \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$	vibrating beam $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$, $\mu = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ $\begin{bmatrix} Y_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cosh \mu l \cos \mu l} \begin{bmatrix} \cosh \mu l \cos \mu l + 1 & \frac{j\omega}{EI\mu^3} (\sinh \mu l \cos \mu l - \cosh \mu l \sin \mu l) \\ EI\mu^3 (\cosh \mu l \sin \mu l - \sinh \mu l \cos \mu l) & 2 \cosh \mu l \cos \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$			
thick cylinder under radial stress $\begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$	U_1, U_2 : radial displacements, $\begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2k} (k^2 + 1 + \frac{k^2 - 1}{m}) & \frac{k^2 - 1}{4\pi k E} (1 - \frac{1}{m}) \\ \frac{r_1}{k} (k^2 - 1) E & \frac{1}{2k} (k^2 + 1 - \frac{k^2 - 1}{m}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$, where $k = \frac{r_2}{r_1}$ r_1 : inner radius, r_2 : outer radius, E : young's modulus, m : poisson's number				
conduction of heat: plane wall $\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$	λ : conductivity C : capacity F : area $s = \frac{\partial}{\partial t}$ $\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l & \lambda F \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \\ \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l & \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$	surface heat transmission $\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$, α : heat transmission constant			
conduction of heat: hollow cylinder $\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \frac{\partial U_1}{\partial r_1} (r_2, r_1) & 2\pi l l \frac{1 - \frac{r_2}{r_1} U_1(r_1, r_2) \cdot U_1(r_2, r_1)}{U_0(r_2, r_1)} \\ -\frac{U_0(r_2, r_1)}{2\pi l l} & r_2 \sqrt{\frac{s}{\alpha}} U_1(r_2, r_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ $U_0(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_0(\mu r_n) - I_0(\mu r_m) K_0(\mu r_n)$ $U_1(r_m, r_n) = K_0(\mu r_m) I_1(\mu r_n) + I_0(\mu r_m) K_1(\mu r_n)$ for steady state, $\begin{bmatrix} Q_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} & 0 \\ -\frac{2\pi l l}{\log \frac{r_2}{r_1}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$				

flow in thin tube
 $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l & b \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \\ \sinh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l & \cosh \sqrt{\frac{s}{\alpha}} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$
 $v = \mu/\rho$ kinematic viscosity
 $c = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ sound velocity
 $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{12\mu}{d^3} \frac{\partial q}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$
 $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{c^2 \rho}{F} \frac{\partial q}{\partial x} = F = \pi d^3/4$
 $a = \frac{\gamma P_0 d^2}{32\mu}$, $b = \frac{12\mu d^2}{12\mu}$
 μ : viscosity, γ : exponent of polytropic change, P_0 : mean pressure, q : flow cc/s

flow resistance
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$

surge tank
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$
 q : cc/s, p : atm, A : area

gas pressure tank
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{V}{\gamma R T} s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$
 q : cc, A : area, g : g·s⁻¹ weight, V : volume, k : stiffness

hydraulic power actuator
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{b}{A} s & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$
 $A P_1 - f_2 = b \frac{dX_2}{dt}$, A : piston area, b : resistance constant

servo-actuator
 $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$
 $f_1 = a X_2 - b \frac{dX_2}{dt}$ integral-action $X_2 \approx \frac{q}{s} \int X_1 dt$

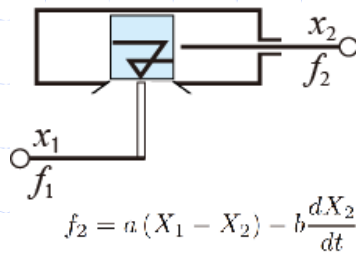
follow-up servo (proportional)
 $\begin{bmatrix} X_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{b}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$
 $f_1 = a(X_1 - X_2) - b \frac{dX_2}{dt}$

differential action
 $\begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha s \\ k k \alpha s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$
 $x = \frac{\alpha x}{s} P_1 \approx k \alpha \frac{dp}{dt}$, $s + \frac{\alpha}{k} \approx$ very large

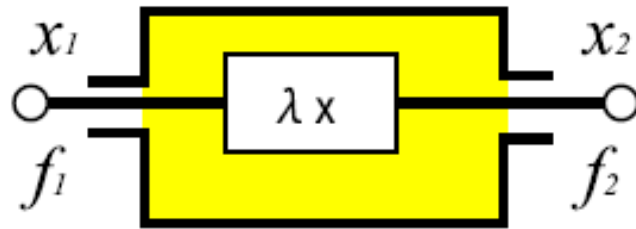
機械要素マトリクス

付録

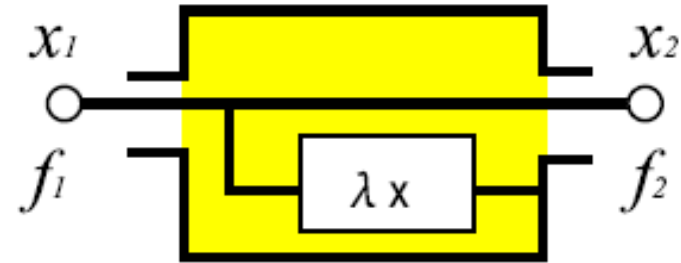
以下付録



直列・並列接続



serial element



parallel element

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \lambda_x f_1 \Rightarrow x_1 = x_2 + \lambda_x f_2 \\ f_1 &= f_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2$$

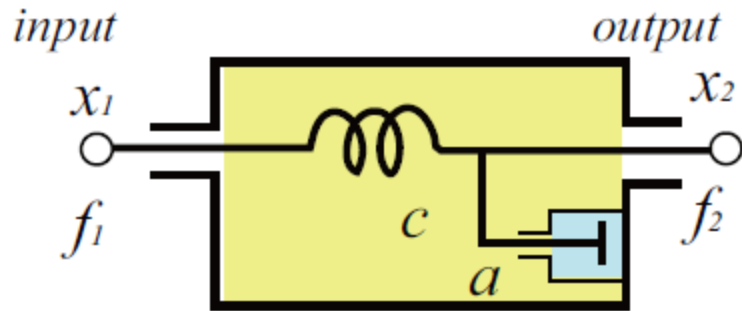
$$x_1 = \lambda_x (f_1 - f_2) \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\lambda_x} x_2 + f_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

1. 単独要素が直列に含まれる場合:伝達マトリクスの上右にとして現れる
2. 2. 並列に含まれる場合:伝達マトリクスの下左に逆数として現れる

合成伝達マトリクス (1)



バネ

$$x_1 - x_2 = cf_1$$

ダンパ

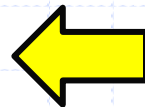
$$\frac{dx_2}{dt} = a(f_1 - f_2)$$

以上
より

$$x_1 = x_2 + cf_1 = x_2 + c\left(\frac{s}{a}x_2 + f_2\right) = \left(1 + \frac{c}{a}s\right)x_2 + cf_2$$

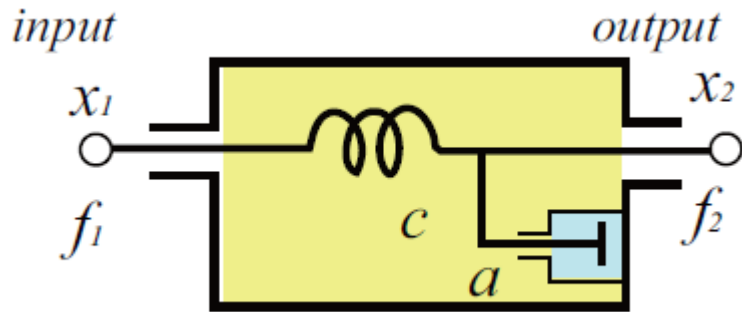
$$f_1 = \frac{s}{a}x_2 + f_2$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

合成伝達マトリクス (2)



$$\Gamma_{spring} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{damper} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \Gamma_{spring} \cdot \Gamma_{damper} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c}{a}s & c \\ \frac{s}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

各要素の伝達マトリクスを順次掛け合わせてた合成伝達マトリクスを求めればよい

伝達マトリクス of 直列接続

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{xi}$$

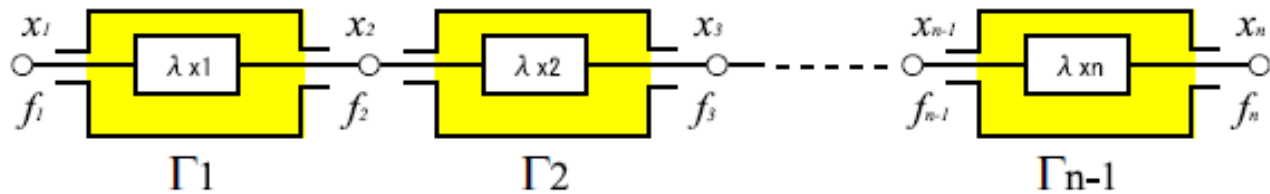


図 7.5: 直列接続の伝達マトリクスの定義

並列要素伝達マトリクスの直列接続

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{xi}^{-1}$$

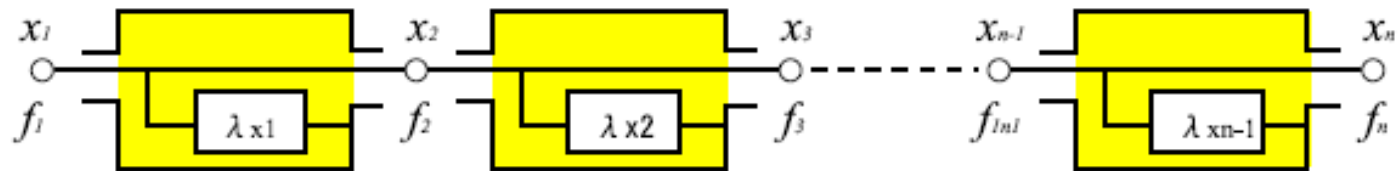


図 7.6: 直列接続の伝達マトリクスの定義

**伝達マトリクスの並列接続は取扱い
が難しい→後述**

座標系の変換1(インピーダンスマトリクス)

旧座標系: $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n)^t$

新座標系: $x' = (x'_1 \quad x'_2 \quad x'_3 \quad \dots \quad x'_n)^t$

$$x = Cx'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

C:座標変換マトリクス

新旧インピーダンスマトリクス

$$x = Cx'$$

新座標系では,

$$f' = Z'x'$$

新旧座標系の仕事は等しい

$$W = f'^t x' = f^t x$$

変換マトリクスCを用いて

$$W = f'^t x' = f^t x = f^t Cx'$$

$$\Rightarrow f'^t = f^t C$$

転置行列を取ると

$$f' = C^t f$$

旧インピーダンスマトリクスを
新インピーダンスマトリクス
への変換は

$$f' = C^t f = C^t Zx = C^t ZCx'$$

$$\Rightarrow Z' = C^t ZC$$

座標系の変換2(インピーダンスマトリクス)

表 2.1: 新旧座標系の関係 (インピーダンスマトリクス)

新座標系		旧座標系
	\mathbf{C}	
\mathbf{x}'	\Rightarrow	\mathbf{x}
$\mathbf{Z}' \Downarrow$		$\mathbf{Z} \Downarrow$
	\mathbf{C}^t	
$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}' \mathbf{x}'$	\Leftarrow	$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$
$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C}$		

座標系の変換1(モビリティマトリクス)

旧座標系: $f = (f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \cdots \quad f_n)^t$

新座標系: $f' = (f'_1 \quad f'_2 \quad f'_3 \quad \cdots \quad f'_n)^t$

$$f = Cf'$$

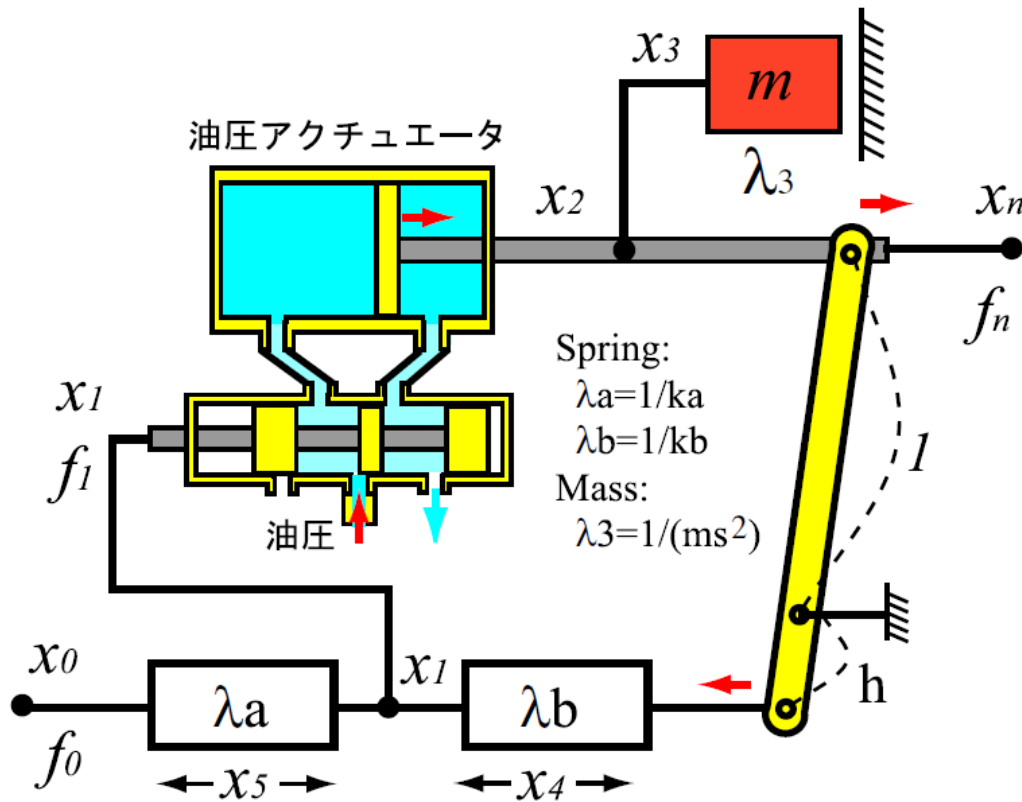
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix}$$

座標系の変換2(モビリティマトリクス)

表 2.2: 新旧座標系の関係 (モビリティマトリクス)

新座標系		旧座標系
	\mathbf{C}	
\mathbf{f}'	\Rightarrow	\mathbf{f}
$\lambda' \Downarrow$		$\lambda \Downarrow$
	\mathbf{C}^t	
$\mathbf{f}' = \mathbf{Z}' \mathbf{x}'$	\Leftarrow	$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{x}$
$\lambda' = \mathbf{C}^t \lambda \mathbf{C}$		

機械回路解析1



$$x_1 = \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

$$x_2 = x_3 = x_n$$

$$x_4 = -x_1 - h x_n$$

$$= -\frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

$$x_5 = x_1 - x_0$$

$$= -\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} x_0 - \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} h x_n$$

機械回路解析2

変換マトリクスCを求める

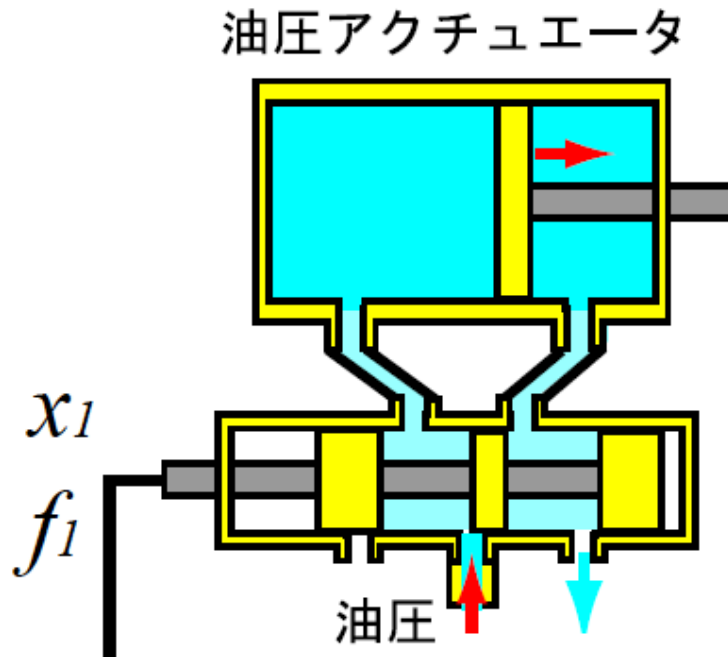
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

式をマトリクス表示すると

$$x = Cx'$$

これより変換マトリクスCは

機械回路解析3



油圧サーボのインピーダンス
マトリクス

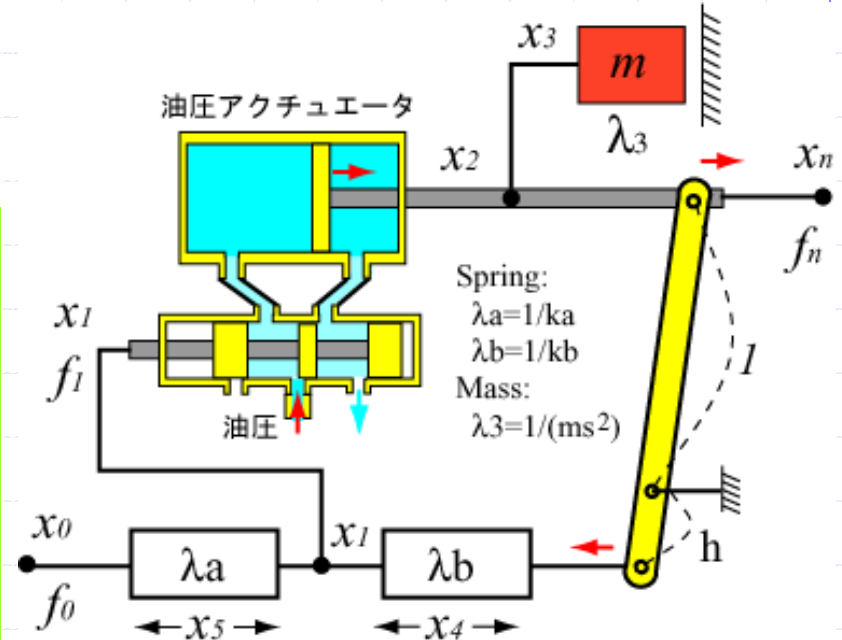
(テキストP103)

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -bs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

機械回路解析4

機械回路の運動方程式

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -bs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$



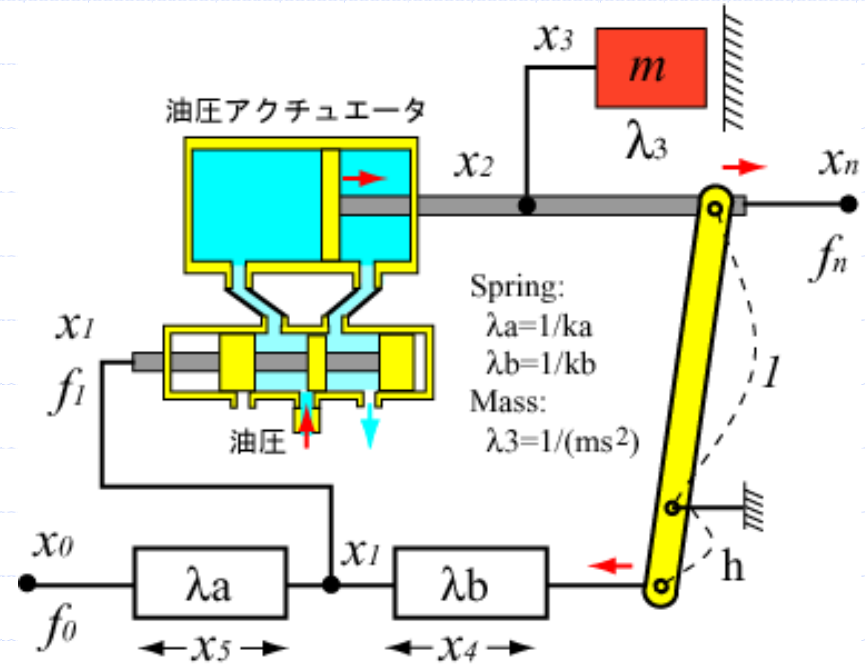
ここで
新座標系で
表現する

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

機械回路解析5

入出力のインピーダンスマトリクス

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C}^t \mathbf{Z} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_a + \lambda_b} & -\frac{h}{\lambda_a + \lambda_b} \\ \frac{a\lambda_b - h}{\lambda_a + \lambda_b} & \left\{ \frac{h(a\lambda_a + h)}{\lambda_a + \lambda_b} + bs + \frac{1}{\lambda_3} \right\} \end{pmatrix}$$

機械回路解析6

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_n \end{pmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix}$$



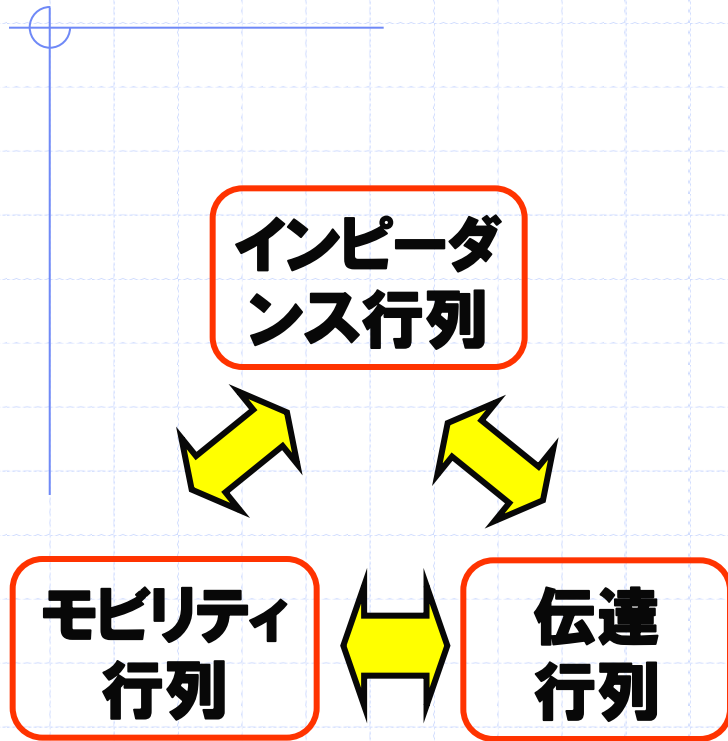
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

インピーダンスマトリクス

伝達マトリクス

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h(a + hk_a)k_b + (bs + ms^2)(k_a + k_b)}{(a - hk_b)k_a} & \frac{k_a + k_b}{(a - hk_a)k_b} \\ -\frac{(ah + bs + ms^2)k_b}{a - hk_b} & -\frac{k_a + k_b}{(a - hk_b)k_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

各マトリクス変換公式



相互変換可能

表 2.3: 各マトリクスの変換公式

インピーダンス・マトリクス

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \lambda^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta_\lambda} \begin{pmatrix} \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} D & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -A \end{pmatrix}$$

$$\Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$$

モビリティ・マトリクス

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\Delta_z} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} A & -\Delta_\Gamma \\ 1 & -D \end{pmatrix}$$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\Gamma = AD - BC$$

伝達マトリクス

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

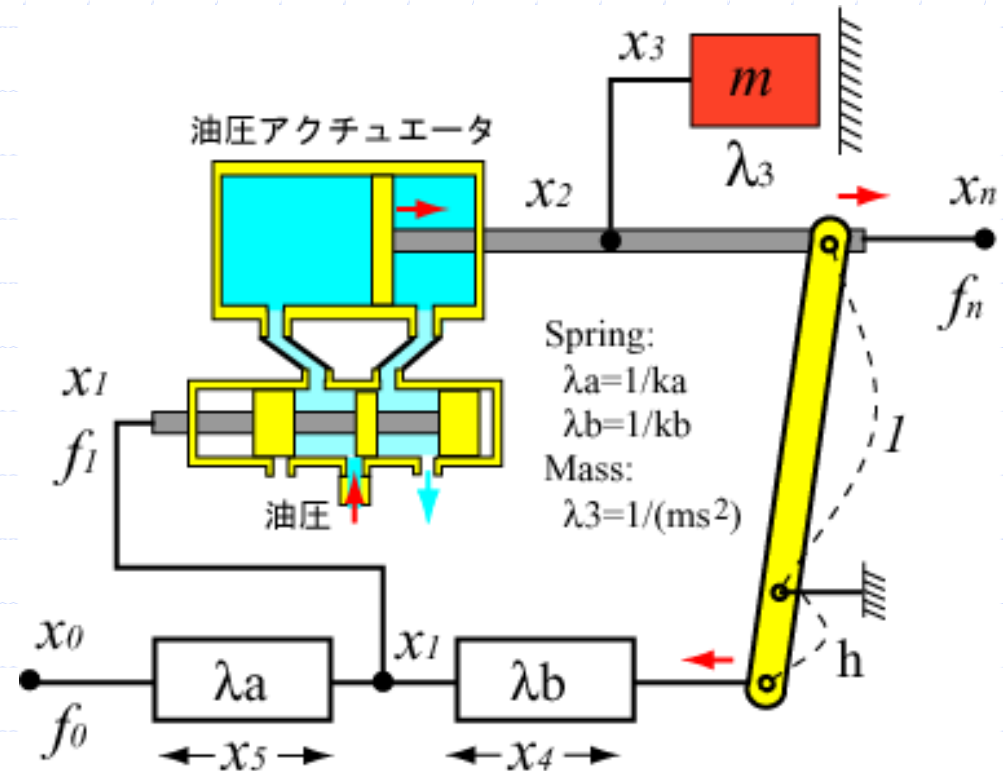
$$\mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{z_{21}} \begin{pmatrix} -z_{22} & 1 \\ -\Delta_z & z_{11} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\lambda_{21}} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & -\Delta_\lambda \\ 1 & -\lambda_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \Delta_\lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

機械回路解析7

出力端を自由とする

$$f_n = 0$$



$$x_n = \frac{(a - hk_a)k_b}{(k_a + k_b)(ms^2 + bs) + hk_b(a + hk_a)} x_0$$